详细解答

STEP III 1989，第 8 题

纯数学 · 耦合微分方程

STEP III 1989，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/89-s3-q8

关键思路

第一条方程把 y 用 x 和 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 表示出来。因此只要把它再微分一次，出现的 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ 就可以用第二条方程代换，y 便完全消失。剩下的是一条二阶常系数线性方程（second-order linear equation with constant coefficients）。它的辅助方程（auxiliary equation）有重根（repeated root），而其中一个强迫项（forcing term）正好与这个根吻合。这种共振（resonance）才是本题真正的考验。

解答

消去 y

以字母上方的点表示对 t 的导数。把 $\dot{x} = 4(x - y)$ 微分，得

$$\ddot{x} = 4\dot{x} - 4\dot{y} = 4\dot{x} - 4x + 48\left(\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t}\right),$$

其中 $\dot{y}$ 用了第二条方程代入。因此

$$\boxed{\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 48\left(\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t}\right),}$$

式中不含 y。

求解 x

余函数（*complementary function*）。辅助方程 $m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 = 0$ 有重根 $m = 2$，所以余函数是

$$x_{\mathrm{c}} = (A + Bt)\,\mathrm{e}^{2t}.$$

特别积分（*particular integral*）。由于方程是线性的，我们可以把两个强迫项逐一处理。

对于 $48\mathrm{e}^{-2t}$，试用 $x = D\mathrm{e}^{-2t}$。代入后得 $D(4+8+4)\mathrm{e}^{-2t} = 48\mathrm{e}^{-2t}$，所以 $D = 3$。

> ? **想一想** 对于 $48\mathrm{e}^{2t}$ 这一项，为甚么 $C\mathrm{e}^{2t}$ 行不通，甚至连 $Ct\,\mathrm{e}^{2t}$ 也行不通？

e^{2t} 和 $t\,\mathrm{e}^{2t}$ 都已经在余函数之中，所以方程左边会把它们变成 0。因为 2 是二重根，我们必须升到 $t^2\mathrm{e}^{2t}$。试用 $x = Ct^2\mathrm{e}^{2t}$。一个简洁的代入方法是写成 $x = u\,\mathrm{e}^{2t}$。这样

$$\dot{x} = (\dot{u} + 2u)\mathrm{e}^{2t}, \qquad \ddot{x} = (\ddot{u} + 4\dot{u} + 4u)\mathrm{e}^{2t},$$

所以

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = \ddot{u}\,\mathrm{e}^{2t}.$$

取 $u = Ct^2$，上式便是 $2C\mathrm{e}^{2t}$，所以 $2C = 48$，即 $C = 24$。（这个代换同时说明了为甚么余函数是 $(A + Bt)\mathrm{e}^{2t}$：我们需要 $\ddot{u} = 0$。）

因此通解（general solution）是

$$x = (A + Bt)\,\mathrm{e}^{2t} + 24t^2\mathrm{e}^{2t} + 3\mathrm{e}^{-2t}.$$

初始条件（*initial conditions*）。题目只给出 $x(0) = 0$ 和 $y(0) = 0$。二阶方程还需要 $\dot{x}(0)$，而原来的第一条方程正好提供了它：$\dot{x}(0) = 4(x(0) - y(0)) = 0$。

由 $x(0) = 0$ 得 $A + 3 = 0$，所以 $A = -3$。微分得

$$\dot{x} = (B + 2A + 2Bt + 48t + 48t^2)\mathrm{e}^{2t} - 6\mathrm{e}^{-2t},$$

所以 $\dot{x}(0) = B + 2A - 6 = 0$，得 $B = 12$。因此

$$\boxed{x = \left(24t^2 + 12t - 3\right)\mathrm{e}^{2t} + 3\mathrm{e}^{-2t}.}$$

求 y

不必再解另一条微分方程，因为第一条方程给出 $y = x - \frac{1}{4}\dot{x}$。代入 $A = -3$ 和 $B = 12$，

$$\dot{x} = \left(48t^2 + 72t + 6\right)\mathrm{e}^{2t} - 6\mathrm{e}^{-2t},$$

所以

$$\begin{aligned} y &= \left(24t^2 + 12t - 3\right)\mathrm{e}^{2t} + 3\mathrm{e}^{-2t} - \left(12t^2 + 18t + \tfrac{3}{2}\right)\mathrm{e}^{2t} + \tfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-2t} \\ &= \left(12t^2 - 6t - \tfrac{9}{2}\right)\mathrm{e}^{2t} + \tfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-2t}. \end{aligned}$$

即

$$\boxed{y = \tfrac{3}{2}\left(8t^2 - 4t - 3\right)\mathrm{e}^{2t} + \tfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-2t}.}$$

验算

- 当 $t = 0$ 时：$y(0) = -\frac{9}{2} + \frac{9}{2} = 0$。这个条件从未直接用上，所以这是一项真正的验算。
- 第二条方程我们只用来消去 y，它也应该成立。微分得

$$\dot{y} = \left(24t^2 + 12t - 15\right)\mathrm{e}^{2t} - 9\mathrm{e}^{-2t},$$

而

$$x - 12\left(\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t}\right) = \left(24t^2 + 12t - 15\right)\mathrm{e}^{2t} - 9\mathrm{e}^{-2t}.$$

两者相符。

- 数值方面，用龙格－库塔法（Runge–Kutta method）由 $(0,0)$ 出发逐步推算原来的方程组，得 $x(1) \approx 244.2449$ 和 $y(1) \approx 11.6926$。公式给出 $33\mathrm{e}^2 + 3\mathrm{e}^{-2}$ 和 $\frac{3}{2}\mathrm{e}^2 + \frac{9}{2}\mathrm{e}^{-2}$，数值与上述结果相同。

常见错误

- 对共振项试用 $Ct\,\mathrm{e}^{2t}$。根 2 是重根，所以我们需要 $t^2\mathrm{e}^{2t}$。
- 看不出第二个初始条件从何而来。$\dot{x}(0) = 0$ 这个值隐藏在第一条方程之中，再配合 $x(0) = y(0)$ 便可得出。
- 另外为 y 解一条二阶方程。这样会引入两个新常数，之后还要把它们与 x 配对。利用 $y = x - \frac{1}{4}\dot{x}$ 便可避免这个麻烦。

STEP 之外

消去 y 是解线性方程组（linear system）的其中一种方法。大学的做法是把它写成 $\dot{\mathbf{v}} = M\mathbf{v} + \mathbf{f}(t)$，其中 $M = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$。这里 M 有重特征值（eigenvalue）2，但只有一个特征向量（eigenvector），所以不能对角化（diagonalise），而 $t\,\mathrm{e}^{2t}$ 项正是由此而来。若尔当标准形（Jordan normal form）和矩阵指数（matrix exponential）e^{Mt} 可以把这一点说得精确。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入门教科书）涵盖线性方程组，包括重特征值的情况。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。