详细解答

# STEP III 1989，第 7 题

纯数学 · 错切矩阵

> **STEP III 1989，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q7

## 关键思路

用两个单位向量（unit vector）来处理，一切都最简单：$\mathbf{u}$ 沿直线 $L\colon y = x\tan\alpha$ 的方向，而 $\mathbf{n}$ 与它垂直。这个错切（shear）把每一点沿平行于 $\mathbf{u}$ 的方向移动，移动量与该点到 $L$ 的有向距离（signed distance）成正比，所以 $\mathbf{M} = \mathbf{I} + k\,\mathbf{u}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}$。至于第二部分，一个矩阵与 $\mathbf{I} + k\mathbf{A}$ 可交换（commute），当且仅当它与 $\mathbf{A}$ 可交换，这样便可撇除一切枝节。

## 解答

记 $s = \sin\alpha$ 及 $c = \cos\alpha$。由于 $\alpha$ 是锐角，故 $s > 0$ 且 $c > 0$。设

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix},$$

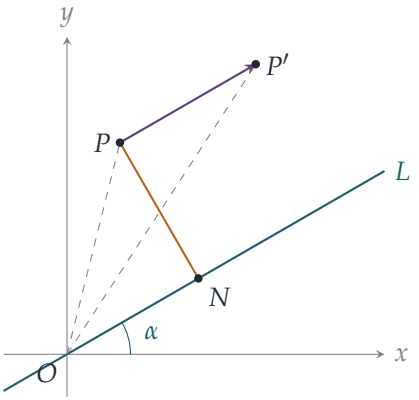
则 $\mathbf{u}$ 是沿 $L$ 方向、与 $x$ 轴成角 $\alpha$ 的单位向量，而 $\mathbf{n}$ 是指向 $L$ 左上方一侧的单位法向量（unit normal）。

### 求 M

对于 $P = (x, y)$，设

$$d = \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OP} = y\cos\alpha - x\sin\alpha,$$

即由 $P$ 到 $L$ 的有向距离。于是 $PN = |d|$，而 $d > 0$ 当且仅当 $P$ 位于 $L$ 的上方。




取 $P$ 在 $L$ 的上方，故 $d > 0$。由 (i)，$\overrightarrow{PP'}$ 沿 $\mathbf{u}$ 的方向，所以 $\overrightarrow{PP'} = \lambda\mathbf{u}$，其中 $\lambda > 0$。条件 (ii) 与此相符：二维叉积（cross product）为

$$\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} \times (\overrightarrow{OP} + \lambda\mathbf{u}) = \lambda\,(xs - yc) = -\lambda d < 0,$$

所以由 $OP$ 转到 $OP'$ 是顺时针方向，符合要求。条件 (iii) 给出 $\lambda = k\,PN = kd$。（要这些条件同时成立，必须有 $k > 0$。）因此，对于 $L$ 上方的每一点 $P$，

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + kd\,\mathbf{u} = \overrightarrow{OP} + k\,\mathbf{u}\,(\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OP}).$$

? **想一想** 我们只用了 $L$ 上方的点。为甚么这样已足以完全确定 $\mathbf{M}$?

T 是线性（linear）的，而映射 $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} + k\,\mathbf{u}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})$ 也是线性的。两者在 $L$ 上方的开半平面（open half-plane）上一致，而这个半平面包含两个线性独立（linearly independent）的向量（例如 $\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{n} + \mathbf{u}$）。两个线性映射若在一组基（basis）上一致，便完全相等。所以对于所有向量，

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} + k\,\mathbf{u}\mathbf{n}^{\mathsf{T}} = \mathbf{I} + k \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -s & c \end{pmatrix} = \mathbf{I} + k \begin{pmatrix} -sc & c^2 \\ -s^2 & sc \end{pmatrix}.$$

亦即

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 - k\sin\alpha\cos\alpha & k\cos^2\alpha \\ -k\sin^2\alpha & 1 + k\sin\alpha\cos\alpha \end{pmatrix},$$

正如所求。作为合理性检查，由 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$ 得 $\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{u}$，所以 $L$ 上每一点都固定不动。此外 $\det\mathbf{M} = 1 - k^2s^2c^2 + k^2s^2c^2 = 1$，正是错切应有的行列式（determinant）值。

### 可交换的条件

设 $\mathbf{A} = \mathbf{u}\mathbf{n}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} -sc & c^2 \\ -s^2 & sc \end{pmatrix}$ 及 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix}$。由于 $\mathbf{M} = \mathbf{I} + k\mathbf{A}$，而 $\mathbf{I}$ 与任何矩阵都可交换，

$$\mathbf{X}\mathbf{M} - \mathbf{M}\mathbf{X} = k(\mathbf{X}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{X}).$$

因为 $k \neq 0$，$\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{M}$ 可交换，当且仅当它与 $\mathbf{A}$ 可交换。乘开得

$$\mathbf{X}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -psc - qs^2 & pc^2 + qsc \\ -rsc - ts^2 & rc^2 + tsc \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -psc + rc^2 & -qsc + tc^2 \\ -ps^2 + rsc & -qs^2 + tsc \end{pmatrix},$$

所以

$$\mathbf{X}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -(qs^2 + rc^2) & -c^2(t-p) + 2qsc \\ -s^2(t-p) - 2rsc & qs^2 + rc^2 \end{pmatrix}.$$

这个矩阵为零，当且仅当

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad qs^2 + rc^2 = 0, \\ &\text{(b)} \quad c^2(t-p) = 2qsc, \\ &\text{(c)} \quad s^2(t-p) = -2rsc. \end{aligned}$$

由于 $c \neq 0$，(b) 即 $t - p = 2q\tan\alpha$。由于 $s \neq 0$，(c) 即 $t - p = -2r\cot\alpha$。

> **想一想** 这里有三条方程，但题目所述的条件只包含两条。(a) 到哪里去了？

它可由另外两条推出。若 $2q\tan\alpha = -2r\cot\alpha$，两边乘以 $\frac{1}{2}sc$ 便得 $qs^2 = -rc^2$，这正是 (a)。所以

$$\mathbf{X}\mathbf{M} = \mathbf{M}\mathbf{X} \iff t - p = 2q\tan\alpha = -2r\cot\alpha.$$

两个方向都成立：以上每一步都是等价关系。这就是所求的充分必要条件（necessary and sufficient condition）。

## 验算

- 取 $\alpha = \frac{\pi}{4}$、$k = 2$，得 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$。点 $(0,1)$ 位于 $y = x$ 上方，距离为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，它被移到 $(1,2)$。这是沿 $45^\circ$ 方向移动了 $\sqrt{2} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$，而且转向是顺时针的。
- $\mathbf{X} = \mathbf{M}$ 本身满足这个条件：$t - p = 2ksc$，$2q\tan\alpha = 2kc^2 \cdot \frac{s}{c} = 2ksc$，以及 $-2r\cot\alpha = 2ks^2 \cdot \frac{c}{s} = 2ksc$。$\mathbf{I}$ 也满足这个条件，三个式子都等于零。
- 以数值方法检验：随机选取 $\alpha$、$k$ 和 $L$ 上方的 $P$，$\mathbf{M}$ 都重现了 (i)–(iii)。满足条件的随机矩阵与 $\mathbf{M}$ 可交换，误差在 $10^{-8}$ 之内；不满足条件的随机矩阵则不可交换。

## 常见错误

- 对每一点都使用不带正负号的距离 $PN$。位移是有向距离的 $k$ 倍。$L$ 下方的点向相反方向移动，正因如此 T 才是线性的。
- 就可交换的条件只证明了“若”（或只证明了“仅若”）的方向，或忘记说明 $(1,1)$ 元素并没有带来新的条件。

## STEP 之外

这里与 $\mathbf{M}$ 可交换的矩阵，恰好就是形如 $a\mathbf{I}+b\mathbf{A}$ 的矩阵：请验证 $t-p=2q\tan\alpha=-2r\cot\alpha$ 是一个双参数族。这是一个一般事实的特例。对于一个不是 $\mathbf{I}$ 的倍数的 $2\times 2$ 矩阵，与它可交换的矩阵恰好就是 $a\mathbf{I}+b\mathbf{M}$。对于 $n\times n$ 矩阵，当最小多项式（minimal polynomial）等于特征多项式（characteristic polynomial）时，相应的结论（可交换的矩阵都是 $\mathbf{M}$ 的多项式）成立。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门教材）阐述了秩一矩阵（rank-one matrix）$\mathbf{u}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}$ 以及这背后的思想。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。