详细解答

STEP III 1989，第 6 题

纯数学 · 圆锥曲线的极坐标方程

STEP III 1989，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/89-s3-q6

关键思路

在极坐标（polar coordinates）中，一条不经过原点的直线的 $1/r$ 等于 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$ 的组合，而把它写成 $A\cos\theta + B\cos(\theta-\gamma)$，就可以与圆锥曲线（conic）本身的 $\cos\theta$ 项完全配对。只要 $e\cos\theta$ 的部分一致，弦（chord）的方程便只需处理单独一个余弦项，其余的就交给关于 $\theta=\gamma$ 的对称性。让弦收缩成一点便得到切线（tangent），而有了切线方程，平分线（bisector）性质几乎是自动得出的。

解答

全文之中，(r,θ) 为极坐标，其中 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，并且容许 $r<0$（点 (r,θ) 与 $(-r,\theta+\pi)$ 是同一点）。圆锥曲线的焦点（focus）S 位于原点。

直线的极坐标形式

由于 $lx+my=1$ 不可能经过原点，直线上 $r\neq 0$，两边除以 r 得

$$\frac{1}{r} = l\cos\theta + m\sin\theta.$$

把题目建议的形式展开，

$$A\cos\theta + B\cos(\theta-\gamma) = (A + B\cos\gamma)\cos\theta + B\sin\gamma\ \sin\theta.$$

若 $B\sin\gamma = m$ 及 $A + B\cos\gamma = l$，两式便对所有 θ 都相等。由于 $\sin\gamma\neq 0$，可取

$$B = \frac{m}{\sin\gamma}, \qquad A = l - m\cot\gamma,$$

这就是所求的极坐标方程。反过来说，任何方程 $1/r = A\cos\theta + B\cos(\theta-\gamma)$，只要 A、B 不会令两个系数同时为零，都是一条直线 $lx+my=1$，其中 $l = A + B\cos\gamma$，$m = B\sin\gamma$。

留意这个形式在 $(r,\theta)\to(-r,\theta+\pi)$ 之下保持不变，所以无论 r 取哪个符号，它描述的都是整条直线。

弦 PQ

设弦的方程具有 $a/r = A\cos\theta + B\cos(\theta-\gamma)$ 的形式。在 P 和 Q 处有 $\theta = \gamma\mp\delta$ 及 $a/r = 1+e\cos\theta$，所以我们需要

$$A\cos(\gamma\mp\delta) + B\cos(\mp\delta) = 1 + e\cos(\gamma\mp\delta).$$

因为对两点而言都有 $\cos(\mp\delta)=\cos\delta$，取 $A=e$，$B\cos\delta = 1$ 便可同时满足两条方程，而 $\cos\delta\neq 0$ 保证可以解出 B。两个相异的点确定一条直线，所以弦 PQ 为

$$\boxed{\frac{a}{r} = e\cos\theta + \sec\delta\,\cos(\theta-\gamma).}$$

（若 $\cos\delta = 0$，则 P 和 Q 位于 $\theta=\gamma\mp\frac{\pi}{2}$，而 PQ 是一条焦弦（focal chord）；经过原点的直线没有 $1/r=\ldots$ 这种形式的方程，这就是该情况被排除的原因。）

> **想一想** 我们怎样知道这条弦只在 P 和 Q 与圆锥曲线相交?

对每个 θ，圆锥曲线上恰有一点，满足 $a/r = 1+e\cos\theta$。弦经过该点，当且仅当 $1+e\cos\theta = e\cos\theta+\sec\delta\cos(\theta-\gamma)$，即 $\cos(\theta-\gamma)=\cos\delta$，所以 $\theta=\gamma\pm\delta$。$e\cos\theta$ 项互相抵消，这正是选取 $A=e$ 的用意所在。

在 $\theta=\gamma$ 处的切线

设 $\theta=\gamma$ 所对应的点为 G，该点的切线就是当 P 和 Q 向 G 靠拢时，亦即 $\delta\to 0$ 时，弦 PQ 的极限。弦的方程连续地依赖于 δ，而 $\sec\delta\to 1$，所以切线为

$$\boxed{\frac{a}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta-\gamma).}$$

作为印证，这条直线与圆锥曲线相交于 $\cos(\theta-\gamma)=1$ 之处，即只在 G 相交，切线理应如此。更具决定性的验证是：切线的直角坐标（cartesian）形式为 $(e+\cos\gamma)x+(\sin\gamma)y=a$，其法向量（normal vector）为 $(e+\cos\gamma,\ \sin\gamma)$。圆锥曲线为 $r=a-ex$；沿曲线求微分得 $(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y)/r = -e\,\mathrm{d}x$，即 $(e+x/r)\,\mathrm{d}x+(y/r)\,\mathrm{d}y=0$。在 G 处，$x/r=\cos\gamma$ 及 $y/r=\sin\gamma$，所以曲线在该处的法向量正是同一个向量。

最后一部分

把焦点 S 置于原点，圆锥曲线便是 $a/r=1+e\cos\theta$，并设 L 和 M 分别为 $\theta=\alpha$ 和 $\theta=\beta$ 所对应的点。记

$$\gamma = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta),\qquad \delta = \tfrac{1}{2}(\beta-\alpha),$$

于是 L 和 M 位于 $\theta = \gamma - \delta$ 和 $\gamma + \delta$，与上文的 P 和 Q 完全一样。根据上一个结果，在 L 和 M 处的切线分别为

$$\frac{a}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \alpha), \qquad \frac{a}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \beta).$$

在 T 处两式同时成立，所以 $\cos(\theta - \alpha) = \cos(\theta - \beta)$。因此，要么 $\theta - \alpha = \theta - \beta + 2k\pi$，这会令 $L = M$；要么

$$\theta - \alpha = -(\theta - \beta) + 2k\pi \quad \Longrightarrow \quad \theta = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) + k\pi = \gamma + k\pi.$$

所以 T 位于经过 S、方向为 $\theta = \gamma$ 的直线上，且

$$r_T = \frac{a}{e\cos\gamma + \cos\delta}$$

（两条切线平行、T 不存在的情况，恰好是 $e\cos\gamma + \cos\delta = 0$ 之时）。

射线 SL 和 SM 分别指向 $\alpha = \gamma - \delta$ 和 $\beta = \gamma + \delta$ 的方向（这里取通常的情况，即在 L 和 M 处 $r > 0$，椭圆（ellipse）或抛物线（parabola）便是如此）。直线 $\theta = \gamma$ 与两条射线所成的角都是 δ，所以直线 ST 平分角 LSM。（若 $r_T < 0$，则 T 位于反方向的射线上，ST 平分的是优角（reflex angle）LSM；角 LST 与角 MST 仍然相等。）

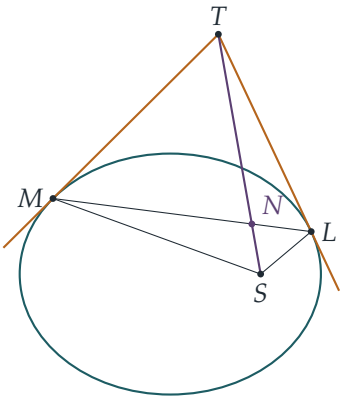
要找出 ST 与 LM 的交点，把该点称为 N。弦 LM 为 $a/r = e\cos\theta + \sec\delta\cos(\theta - \gamma)$，而在 ST 上有 $\theta = \gamma$，所以

$$\frac{a}{SN} = e\cos\gamma + \sec\delta \quad \Longrightarrow \quad SN = \frac{a\cos\delta}{1 + e\cos\gamma\cos\delta}.$$

利用 $2\cos\gamma\cos\delta = \cos(\gamma - \delta) + \cos(\gamma + \delta) = \cos\alpha + \cos\beta$，上式即

$$\boxed{N \text{ 位于} \theta = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta), \quad r = \frac{2a\cos\frac{1}{2}(\beta - \alpha)}{2 + e\cos\alpha + e\cos\beta}.}$$

当 LM 是焦弦（$\cos\delta = 0$）时，这给出 $N = S$，正如所料。



验算

- 试试圆的情况（$e = 0$，半径为 a）：切线变成 $a/r = \cos(\theta - \gamma)$，即 $x\cos\gamma + y\sin\gamma = a$，正是 $x^2 + y^2 = a^2$ 为人熟悉的切线。
- 三角形 LSM 中的角平分线定理（angle bisector theorem）指出 $LN : NM = SL : SM$。取 $a = 1.5$，$e = 0.6$，$\alpha = 40°$，$\beta = 160°$（即图中的情况），得 $SN \approx 0.791$，而该比例经数值验算后成立。
- 我们用电脑在数以千计随机选取的圆锥曲线和点上，测试了弦与切线的方程、ST 的方向、两角相等的性质，以及 SN 的公式。

常见错误

- 解 $\cos(\theta - \alpha) = \cos(\theta - \beta)$ 时只取 $+$ 号。这个分支得不出任何结果（它需要 $\alpha = \beta$），有用的解来自 $-$ 号。
- 没有善用 A 的选择自由：取 $A = e$，才能令 $e\cos\theta$ 项在与圆锥曲线求交点时互相抵消。

STEP 之外

ST 平分 $\angle LSM$ 这个结果，是圆锥曲线一个经典的焦点性质，而直线 LM 则是 T 关于该圆锥曲线的极线（*polar*）。极点与极线的对偶（pole–polar duality）是通往射影几何（projective geometry）的大门；在射影几何中，所有非退化的圆锥曲线都是等价的，相切与关联都变成纯粹的代数关系。Brannan、Esplen 与 Gray 合著的 *Geometry*（《几何学》）是一本很好的大学一年级程度读物，讲述圆锥曲线与射影几何。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。