详细解答

STEP III 1989，第 5 题

纯数学 · 切比雪夫多项式

> **STEP III 1989，第 5 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q5

关键思路

设 $x = \cosh\theta$。这样 $e^{\pm\theta}$ 正好就是 $x \pm \sqrt{x^2-1}$，而 $y = \cosh n\theta$ 是它们的 n 次幂的平均值。用二项式定理（binomial theorem）展开这些幂，$\sqrt{x^2-1}$ 的奇次幂会互相抵消，余下的就是 x 的多项式（polynomial）。只要把这个多项式写成整齐的形式，每个系数（coefficient）不过是几个二项式系数（binomial coefficient）之和。

解答

闭合形式

设 $\theta = \cosh^{-1} x$，则 $\theta \geq 0$ 且 $x = \cosh\theta$。于是 $\sinh\theta \geq 0$ 而 $\sinh^2\theta = x^2 - 1$，所以 $\sinh\theta = \sqrt{x^2-1}$。因此

$$e^{\theta} = \cosh\theta + \sinh\theta = x + \sqrt{x^2-1}, \qquad e^{-\theta} = \cosh\theta - \sinh\theta = x - \sqrt{x^2-1}.$$

故此

$$y = \cosh n\theta = \frac{e^{n\theta} + e^{-n\theta}}{2} = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2},$$

这正是所要证明的结果。

为何 y 是奇多项式

记 $s = \sqrt{x^2-1}$。由二项式定理，

$$(x+s)^n + (x-s)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} s^j (1 + (-1)^j) = 2 \sum_{j \text{ 为偶数}} \binom{n}{j} x^{n-j} s^j.$$

s 的奇次幂互相抵消，而每个偶次幂 $s^{2m} = (x^2-1)^m$ 都是 x 的多项式。所以

$$y = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2m} x^{n-2m}(x^2-1)^m.$$

现在取 $n = 2k+1$，则 m 由 0 取到 k。每一项都是奇次幂 $x^{2k+1-2m}$ 乘以一个 x^2 的多项式，所以只含 x 的奇次幂，其中最高的是 x^{2k+1}。因此 $y = a_0x + a_1x^3 + \cdots + a_kx^{2k+1}$。

要读出各系数，设 $j = k-m$（即 $j = 0,\ldots,k$），并利用 $\binom{2k+1}{2k-2j} = \binom{2k+1}{2j+1}$：

$$y = \sum_{j=0}^{k} \binom{2k+1}{2j+1} x^{2j+1}(x^2-1)^{k-j}.$$

指标为 j 的那一项由 x^{2j+1} 开始。所以 x^{2r+1} 只来自 $j \le r$ 的各项，而在其中第 j 项，我们需要 $(x^2-1)^{k-j}$ 中的 $(x^2)^{r-j}$ 项，即 $\binom{k-j}{r-j}(-1)^{k-r}$。因此

$$a_r = (-1)^{k-r} \sum_{j=0}^{r} \binom{2k+1}{2j+1}\binom{k-j}{r-j}. \qquad (*)$$

a_0

当 $r = 0$ 时，只有 $j = 0$ 有贡献：

$$a_0 = (-1)^k \binom{2k+1}{1} = (-1)^k(2k+1).$$

第 (i) 部分

当 $r = 1$ 时，$j = 0, 1$ 有贡献：

$$\begin{aligned} a_1 &= (-1)^{k-1}\left[(2k+1)\binom{k}{1} + \binom{2k+1}{3}\right] = (-1)^{k-1}(2k+1)\left[k + \frac{2k(2k-1)}{6}\right] \\ &= (-1)^{k-1}(2k+1)\,k\,\frac{3+2k-1}{3} = (-1)^{k-1}\,\frac{2k(k+1)(2k+1)}{3}, \end{aligned}$$

这正是所要证明的结果。

第 (ii) 部分

这里需要 $k \ge 2$，x^5 才会出现。当 $r = 2$ 时，$j = 0, 1, 2$ 有贡献：

$$a_2 = (-1)^k\left[(2k+1)\binom{k}{2} + \binom{2k+1}{3}\binom{k-1}{1} + \binom{2k+1}{5}\right].$$

每一项都有因子 $(2k+1)k(k-1)$；把它抽出，

$$\begin{aligned} a_2 &= (-1)^k(2k+1)k(k-1)\left[\frac{1}{2}+\frac{2k-1}{3}+\frac{(2k-1)(2k-3)}{30}\right] \\ &= (-1)^k(2k+1)k(k-1)\,\frac{15+(20k-10)+(4k^2-8k+3)}{30} \\ &= (-1)^k(2k+1)k(k-1)\,\frac{4(k+1)(k+2)}{30} = (-1)^k\,\frac{2(k-1)k(k+1)(k+2)(2k+1)}{15}. \end{aligned}$$

处理第三项时，我们用了 $\binom{2k+1}{5} = \frac{(2k+1)(2k)(2k-1)(2k-2)(2k-3)}{120} = \frac{(2k+1)k(k-1)(2k-1)(2k-3)}{30}$。

想一想 我们的答案有一个因子 $(k+1)$，而 (ii) 中印出的公式却没有。哪一个才对?

用 $k=2$ 来检验。这时 $y=\cosh(5\theta)$，其中 $x=\cosh\theta$，而 $\cosh 5\theta = 16x^5-20x^3+5x$，所以 $a_2=16$。我们的公式给出 $2\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5/15=16$。印出的公式则给出 $2\cdot1\cdot2\cdot4\cdot5/15=\frac{16}{3}$，这不可能正确，因为各个 a_r 都是整数。所以试卷有印刷错误：漏了因子 $(k+1)$。正确的结果就是上面所示的那一个。

系数之和

在多项式中代入 $x=1$。由于恒等式对 $x\geq 1$ 成立，而 $x=1$ 在容许范围之内，

$$\sum_{r=0}^{k} a_r = y(1) = \cosh(n\cosh^{-1}1) = \cosh 0 = 1.$$

验算

- $k=1$: $\cosh 3\theta = 4x^3-3x$。公式给出 $a_0=-3$ 和 $a_1=2\cdot1\cdot2\cdot3/3=4$，而 $-3+4=1$。
- $k=3$：$\cosh 7\theta = 64x^7-112x^5+56x^3-7x$。公式给出 $a_0=-7$、$a_1=56$ 和 $a_2=-2\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot7/15=-112$，而各系数之和为 1。
- 我们用电脑把 $(*)$ 与递推关系（recurrence）$T_{m+1}=2xT_m-T_{m-1}$ 对照，检验了所有 $k\leq 14$ 的情况，并在随机选取的 $x\geq 1$ 处把多项式与 $\cosh(n\cosh^{-1}x)$ 作比较。

常见错误

- 忘记了 x^{2r+1} 的系数来自展开式中的好几项，而不只是一项。
- 正负号出错：a_r 的每一项贡献都带有相同的符号 $(-1)^{k-r}$，所以应先把它抽出。
- 硬要把代数运算凑成 (ii) 中印出的形式。只要检验一个小的情况，例如 $k=2$，便知道那是印错了的。

STEP 之外

多项式 y 就是切比雪夫多项式（Chebyshev polynomial）$T_n(x)$，通常以 $T_n(\cos\phi) = \cos n\phi$ 来定义。我们的双曲函数（hyperbolic function）版本是同一个恒等式在 $x \geq 1$ 时的情形，而两者一致，是因为多项式由它在任何一个区间上的值完全确定。切比雪夫多项式在逼近论（approximation theory）中占有核心地位，因为在所有 n 次首一多项式（monic polynomial）之中，$2^{1-n}T_n$ 在 $[-1, 1]$ 上的最大绝对值是最小的。在任何数值分析（numerical analysis）的入门课程中，它们都会再次出现。如果想多做一些这类代数运算的 STEP 式练习，可以试试 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 进阶数学题集）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。