详细解答

STEP III 1989，第 4 题

纯数学 · 曲线描绘与根

> **STEP III 1989，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q4

关键思路

把分式拆成多项式加一个真分式（proper fraction），斜渐近线（oblique asymptote）便立刻出现，求导数（derivative）也变得容易。结果发现导数处处大于 2，所以三段分支各自由 $-\infty$ 一直上升到 $+\infty$。题目后半部的每一条方程，其实都是“曲线 = 某条较简单的曲线”的变相写法。两者之差在每段分支上的严格单调性（strict monotonicity），便能准确数出交点的数目。

解答

曲线

由于 $2x(x^2-5) = 2x(x^2-4) - 2x$，

$$y = 2x - \frac{2x}{x^2-4}.$$

这个函数是奇函数（odd function），所以曲线关于原点有 2 阶旋转对称（rotational symmetry）。曲线只在 $x(x^2-5)=0$ 之处与坐标轴相交，即 $x=0$ 及 $x=\pm\sqrt{5}$。

渐近线。分母在 $x=\pm 2$ 时为零（此时分子为 $\mp 4 \neq 0$），所以 $x=2$ 和 $x=-2$ 是铅垂渐近线（vertical asymptote）。当 $|x|\to\infty$ 时，$\frac{2x}{x^2-4}\to 0$，所以 $y=2x$ 是斜渐近线。此外，$y-2x = -\frac{2x}{x^2-4}$ 在 x 为很大的正数时是负的，在 x 为很大的负数时是正的。因此曲线在右方从下方趋近 $y=2x$，在左方则从上方趋近。

斜率。对拆开后的式子求导，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2 - \frac{2(x^2-4) - 2x\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = 2 + \frac{2(x^2+4)}{(x^2-4)^2} > 2.$$

所以曲线没有驻点（stationary point），而 y 在 $x<-2$、$-2<x<2$ 和 $x>2$ 这三个区间上各自严格递增。再求导一次，得 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\dfrac{4x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$，所以唯一的拐点（point of inflection）是原点。

原点处的切线。在 $x=0$ 处斜率为 $2+\frac{2\cdot4}{16}=\frac{5}{2}$，所以该处的切线（tangent）是

$$y=\tfrac{5}{2}x.$$

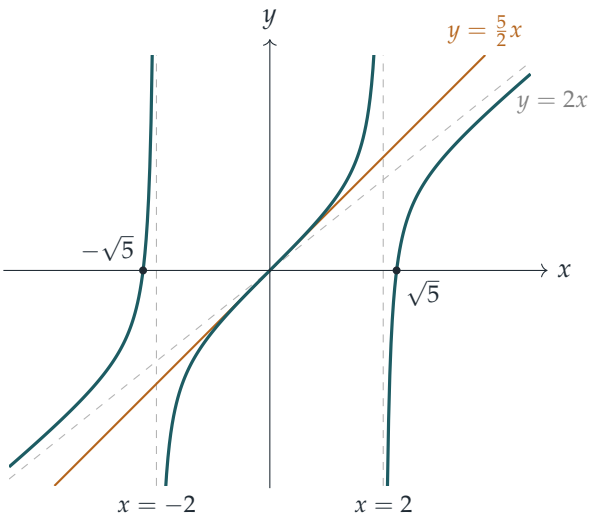
在 $x=\pm2$ 附近的性态。在 $x=2$ 附近，$-\frac{2x}{x^2-4}$ 这一项起主导作用。当 $x\to2^+$ 时它趋向 $-\infty$，当 $x\to2^-$ 时趋向 $+\infty$；由对称性，当 $x\to-2^-$ 时它趋向 $+\infty$，当 $x\to-2^+$ 时趋向 $-\infty$。因此：

- 当 $x<-2$ 时，y 由 $-\infty$ 上升至 $+\infty$，并在 $-\sqrt{5}$ 处穿过横轴；
- 当 $-2<x<2$ 时，y 由 $-\infty$ 上升至 $+\infty$，并经过原点；
- 当 $x>2$ 时，y 由 $-\infty$ 上升至 $+\infty$，并在 $\sqrt{5}$ 处穿过横轴。

还有一个事实稍后会用得着。当 $0<x<2$ 时，

$$y-\tfrac{5}{2}x=\frac{x\left[4(x^2-5)-5(x^2-4)\right]}{2(x^2-4)}=\frac{-x^3}{2(x^2-4)}>0,$$

所以在这一段上，曲线位于原点处切线的上方（由对称性，当 $-2<x<0$ 时则位于切线下方）。



第 (i) 部分

$x = 0$（左边为 0，右边为 8）和 $x = \pm 2$（左边为 -16，右边为 0）都不是根。所以我们可以除以 $2x(x^2-4)$，方程变成

$$\frac{2x(x^2-5)}{x^2-4} = \frac{5x-2}{2x} = \frac{5}{2} - \frac{1}{x}.$$

因此，方程的根就是曲线与双曲线（hyperbola）$H\colon y = \frac{5}{2} - \frac{1}{x}$ 各交点的 x-坐标。我们逐段分支来看。

- $x < -2$：这里 H 的斜率为 $\frac{1}{x^2} < \frac{1}{4}$，而曲线的斜率 > 2。所以两者之差（曲线 $-$ H）严格递增。当 $x \to -\infty$ 时它趋向 $-\infty$，当 $x \to -2^-$ 时趋向 $+\infty$，因为 H 一直介乎 $\frac{5}{2}$ 与 3 之间。恰有一个根。
- $-2 < x < 0$：曲线上 $y < 0$（三个因子 x、x^2-5、x^2-4 全是负的），但 H 上 $y > \frac{5}{2}$。没有根。
- $0 < x < 2$：由上面的事实，$y > \frac{5}{2}x$。另外

  $$\tfrac{5}{2}x - \left(\tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{x}\right) = \frac{5x^2-5x+2}{2x} > 0,$$

  因为 $5x^2-5x+2$ 的判别式（discriminant）为 $25-40 < 0$。所以曲线严格位于 H 的上方。没有根。
- $x > 2$：与第一种情况一样，两者之差严格递增（斜率 $> 2 - \frac{1}{4}$）。它由 $-\infty$ 走到 $+\infty$，因为 H 一直介乎 2 与 $\frac{5}{2}$ 之间。恰有一个根。

所以方程 (i) 恰有**两**个实根，一个小于 -2，一个大于 2。

> ? **想一想** (ii) 的方程两边都有平方，怎样才能从曲线上把它读出来?

除以 $(x^2-4)^2$。左边变成 y^2，所以方程说的是 $y^2 = x^2+1$。

第 (ii) 部分

同样，$x = \pm 2$ 不是根（左边为 16，右边为 0）。所以方程就是 $y^2 = x^2+1$，其中 y 是曲线的纵坐标（ordinate）。方程的根就是曲线与等轴双曲线（rectangular hyperbola）$y^2 - x^2 = 1$ 的两支 $y = \pm\sqrt{x^2+1}$ 的交点。

上支。设 $f(x) = y - \sqrt{x^2+1}$。则

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} > 2 - 1 > 0,$$

所以 f 在三个区间上各自严格递增。在每个区间上，y 由 $-\infty$ 走到 $+\infty$，而 $\sqrt{x^2+1}$ 保持有限（它的增长只与 $|x|$ 相若，而当 $x \to +\infty$ 时对手是 $2x$；当 $x \to -\infty$ 时，f 的两项都是负的）。所以 f 由 $-\infty$ 走到 $+\infty$，每个区间上恰有一个根：合共三个。

下支。映射 $(x,y) \mapsto (-x,-y)$ 把曲线映到自身，并把下支映到上支。所以曲线与下支也恰有三个交点。

这两组根不会重叠：对同一个 x，曲线只有一个 y，它不可能既正又负。所以方程 (ii) 恰有**六**个实根。（作为验算，它是一条 6 次多项式方程，即 $3x^6 - 33x^4 + 92x^2 - 16 = 0$，所以它的根全是实数。）

? **想一想** (iii) 的变量是 z 而不是 x，而且 z 可能是负数。怎样才能把曲线用上?

当 $z > 0$ 时，我们令 $z = x^2$，其中 $x > 0$。至于 $z \le 0$ 的情况，则另外直接处理。

第 (iii) 部分

左边永不为负，所以任何根都必须满足 $z + 1 \ge 0$，即 $z \ge -1$。另外 $z = 0$ 不是根（左边为 0，右边为 16），$z = 4$ 也不是（左边为 64，右边为 0）。

满足 $z > 0$ 的根。令 $z = x^2$，其中 $x > 0$，使每个正根 z 恰好对应一个 $x > 0$。方程变成 $4x^4(x^2-5)^2 = (x^2-4)^2(x^2+1)$。除以 $x^2(x^2-4)^2$ 得

$$y^2 = 1 + \frac{1}{x^2}, \qquad \text{即} \qquad y = \pm s(x), \quad s(x) = \sqrt{1+x^{-2}}.$$

这里 s 由 $+\infty$（当 $x \to 0^+$）递减至 1（当 $x \to \infty$），而 $s'(x) = -\dfrac{1}{x^3\sqrt{1+x^{-2}}}$，所以 $|s'(x)| < \frac{1}{x^3}$。

- $y = s(x)$：函数 $y - s$ 的导数为 $y' - s' > 2$。在 $(0,2)$ 上，它由 $-\infty$（因为 $y \to 0$ 而 $s \to \infty$）走到 $+\infty$。在 $(2,\infty)$ 上，它同样由 $-\infty$ 走到 $+\infty$。每个区间上各有一个根，所以共有两个根。
- 在 $(0,2)$ 上的 $y = -s(x)$：曲线在那里满足 $y > 0 > -s$。没有根。
- 在 $(2,\infty)$ 上的 $y = -s(x)$：函数 $y + s$ 的导数为 $y' + s' > 2 - \frac{1}{8} > 0$，并由 $-\infty$ 走到 $+\infty$。有一个根。

所以恰有三个正根 z。

满足 $-1 \le z < 0$ 的根。写 $z = -t$，其中 $0 < t \le 1$。方程变成

$$4t^2(t+5)^2 = (t+4)^2(1-t).$$

在 $(0,1]$ 上，左边严格递增，由 0（当 $t \to 0$）增至 144。右边严格递减，由 16 减至 0。两者之差严格递增并且变号，所以恰有一个根。

因此方程 (iii) 恰有**四**个实根：三个正根，另一个在 $(-1,0)$ 内。展开后，它是四次方程（quartic）$4z^4-41z^3+107z^2-8z-16=0$，所以它的四个根全是实数。

验算

- 在 $x=1000$ 处，$y-2x\approx -0.002$，印证了曲线是从下方趋近 $y=2x$。
- 用数值计算，(i) 的根为 $x\approx -2.143$ 和 2.401，一如所料，外侧两段分支上各有一个。
- (ii) 的根为 $x\approx \pm 0.431,\ \pm 2.155,\ \pm 2.484$，对双曲线的每一支而言，曲线的每段分支上各有一个。
- (iii) 的根为 $z\approx -0.332,\ 0.473,\ 4.799,\ 5.310$。后三个给出 $x=\sqrt{z}\approx 0.688,\ 2.191,\ 2.304$，曲线上相应的值为 $y\approx 1.77,\ -1.10,\ 1.09$，与分情况讨论的结果吻合。

常见错误

- 没有先检查 $x=0$ 和 $x=\pm 2$ 不是根，就除以 x 或 x^2-4。
- 在 (ii) 中，只数与 $y=+\sqrt{x^2+1}$ 的交点而忘记了下支，结果得出 3 而不是 6。
- 在 (iii) 中，代入 $z=x^2$ 而忘记了 z 可以是负数，因而漏掉 $(-1,0)$ 内的根。

STEP 之外

这里的计数论证，建基于介值定理（intermediate value theorem，即变号的连续函数必有零点），再加上严格单调性（零点最多只有一个）。把这两个事实严格地建立起来，是大学分析课程最先要做的工作之一。Abbott 的 *Understanding Analysis* 对两者都有细致而易读的论述。笛卡儿（Descartes）符号法则（rule of signs）和施图姆（Sturm）序列是数算多项式实根数目的代数方法，与这里所用的几何方法对照起来，相当有趣。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。