详细解答

STEP III 1989，第 2 题

纯数学 • 三维空间中的平面

> **STEP III 1989，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q2

关键思路

引入坐标：东、北和上。这样每个平面都是一个图像 $z = px + qy + r$，而三个点就能确定一个平面。平面有多陡，只取决于 z 沿水平方向变化得多快，所以所求的角可由 p 和 q 得出。第二部分有一条巧妙的捷径：矿层在地面以下的深度同样是位置的线性函数（linear function），而矿层恰好在深度为零之处露出地面。

解答

建立坐标

取 A 为原点，x 轴指向东，y 轴指向北，z 轴铅垂向上（所有长度以米为单位）。于是

$$A = (0,0,0), \qquad B = (0,100,-5), \qquad C = (60,100,-10),$$

因为 B 比 A 低 5 m，而 C 又比 B 再低 5 m。钻孔（bore-hole）是铅垂的，所以钻孔碰到矿层（seam）的点就在这些点的正下方：

$$A' = (0,0,-95), \qquad B' = (0,100,-50), \qquad C' = (60,100,-86).$$

矿层的倾角

矿层并非铅垂，因为 A', B', C' 位于三个在平面图（plan）上不共线（collinear）的点的上方。所以我们可以把它写成 $z = px + qy + r$。

- 在 A'：$r = -95$。
- 由 A' 到 B'，y 增加 100，z 增加 45，所以 $100q = 45$，即 $q = \frac{9}{20}$。

▶ 由 B' 到 C'，x 增加 60，z 的变化为 -36，所以 $60p = -36$，即 $p = -\frac{3}{5}$。

因此矿层为

$$z = -\tfrac{3}{5}x + \tfrac{9}{20}y - 95,$$

它的一个法向量（normal vector）是 $\mathbf{n} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{9}{20}, 1\right)$，或者乘以 20 后得 $(12, -9, 20)$。

两个平面之间的夹角等于它们的法线之间的夹角。水平面的法向量是 $\mathbf{k} = (0,0,1)$，所以矿层与水平面的夹角 θ 满足

$$\cos\theta = \frac{|(12,-9,20)\cdot(0,0,1)|}{\sqrt{12^2+9^2+20^2}} = \frac{20}{\sqrt{144+81+400}} = \frac{20}{\sqrt{625}} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$$

故此矿层与水平面的倾角为 $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$，正如题目所求。

（另一个看法：沿最大斜率线（line of greatest slope），水平方向每走一米，z 的变化为 $\sqrt{p^2+q^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{81}{400}} = \frac{3}{4}$。所以 $\tan\theta = \frac{3}{4}$，是一个 3–4–5 三角形，于是 $\cos\theta = \frac{4}{5}$。）

矿层在何处露出地面

地面是一个通过原点的平面。与之前的做法一样，由 A 向北走到 B，地面每 100 下降 5；由 B 向东走到 C，地面每 60 下降 5，所以

$$z = -\tfrac{1}{12}x - \tfrac{1}{20}y.$$

想一想 我们真的需要联立求解两个平面方程吗?

不尽然。设 $d(x,y)$ 为在水平位置 (x,y) 处矿层在地面以下的深度。它是两个线性函数之差，所以本身也是线性的：

$$d(x,y) = \left(-\tfrac{1}{12}x - \tfrac{1}{20}y\right) - \left(-\tfrac{3}{5}x + \tfrac{9}{20}y - 95\right) = \tfrac{31}{60}x - \tfrac{1}{2}y + 95.$$

作为验算，$d(0,0) = 95$、$d(0,100) = 45$ 及 $d(60,100) = 45 + 31 = 76$，正是三个钻孔的深度。（其实我们可以直接由这些数据写出 d：向北每走 100 m，深度减少 50；向东每走 60 m，深度增加 31。）

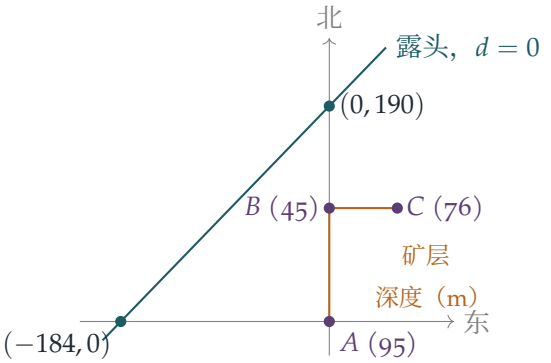
矿层在 $d = 0$ 之处露出地面，在平面图上这是直线

$$\tfrac{31}{60}x - \tfrac{1}{2}y + 95 = 0, \qquad \text{即} \qquad y = \tfrac{31}{30}x + 190.$$

沿这条直线，每向东移动 30 m，就同时向北移动 31 m。所以这条直线与正北方向成角 φ，其中

$$\tan\varphi = \frac{\text{东}}{\text{北}} = \frac{30}{31}, \qquad \varphi = \tan^{-1}\left(\tfrac{30}{31}\right) \approx 44.06^\circ.$$

因此这条直线的方位角（bearing）是 $\tan^{-1}\left(\frac{30}{31}\right) \approx 044^\circ$。若从相反方向来读，则是 224°；一条直线有这两个方位角，用哪一个来描述它都可以。这条直线的走向略偏于东北方向以西，在平面图上它通过 A 正北 190 m 处。



验算

- 矿层的法向量 $(12, -9, 20)$ 的长度恰好是 25，所以 $\cos\theta = \frac{20}{25}$，是一个整齐的 3–4–5 答案，与题目所预告的一致。
- 深度公式 d 重现了全部三个钻孔的深度，所以两个平面都是对的。
- 数值上，$\tan^{-1}(30/31) = 44.0608°$。在直线 $y = \frac{31}{30}x + 190$ 上随机取点，两个平面给出的高度相同，只差舍入误差。

常见错误

- 把每个钻孔由孔口起计的深度直接拿来用，仿佛各孔口处于同一水平。B 和 C 分别比 A 低 5 m 和 10 m，所以在该两处矿层位于 A 的水平以下 50 m 和 86 m，而不是 45 m 和 76 m。
- 给出矿层内一条水平线的方位角（即 $-\frac{3}{5}x + \frac{9}{20}y$ 为常数之处，方位角为 $\tan^{-1}\frac{3}{4} \approx 037°$），而不是露头（outcrop）的方位角。由于地面也是倾斜的，两者并不相同。
- 把 $\tan\varphi =$ 东/北 与北/东混淆。方位角是由北起顺时针方向量度的。

STEP 之外

这是地质学家的“走向与倾角”（strike and dip）问题，所用的工具属于大学一年级的向量几何：以 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} = c$ 表示平面、通过法线求平面之间的夹角，以及交线。深度这一招是一个普遍原理的例子：两个仿射函数（affine function）之差仍是仿射函数，所以两个不平行平面的交集就是某一个线性函数的零点集（zero set）。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）把这幅图像融入线性方程的几何之中。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。