详细解答

STEP III 1989，第 14 题

力学 · 滑轮与冲量

STEP III 1989，第 14 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/89-s3-q14

关键思路

第 (i) 部分：把圆盘切成许多薄圆环，每个圆环上的质量全都与圆心相距同一距离，因此质量和转动惯量（moment of inertia）都只是对 r 的单一积分。第 (ii) 部分：整个系统只有一个自由度（degree of freedom），即 D 的深度，所以一条运动方程（equation of motion）便可求出加速度。当 B 突然被截停时，绳的约束（constraint）立刻告诉我们 D 此后可以运动得多快，而冲量（impulse）正是它的动量（momentum）的改变。

解答

第 (i) 部分

（第 (i) 部分所指的轴是通过圆心 O 的轴；试卷上的“C”是印刷错误。）设与 O 相距 r 处的密度为 $\rho = kr$，其中 k 为常数。半径 r 与 $r + \mathrm{d}r$ 之间的薄圆环面积为 $2\pi r\,\mathrm{d}r$，故质量为 $2\pi kr^2\,\mathrm{d}r$，而且环上每一点与轴的距离都是 r。因此

$$m = \int_0^a 2\pi kr^2\,\mathrm{d}r = \frac{2\pi ka^3}{3}, \qquad I = \int_0^a r^2 \cdot 2\pi kr^2\,\mathrm{d}r = \frac{2\pi ka^5}{5}.$$

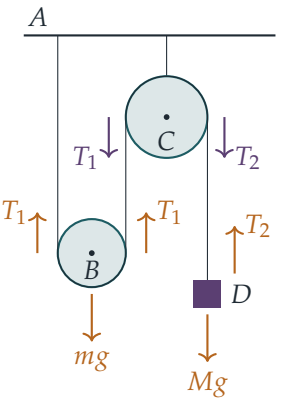
两式相除，得 $I/m = \frac{3}{5}a^2$，所以

$$I = \tfrac{3}{5}ma^2,$$

这正是所要证明的结果。（它比均匀圆盘的 $\frac{1}{2}ma^2$ 大，这是合理的：较多的质量集中在边缘附近。）

第 (ii) 部分：B 被截停前的运动

模型：B 是质量为 m 的光滑滑轮（pulley），C 是 (i) 中那种圆盘，质量为 m、半径为 a，所以它绕其固定轴的转动惯量是 $\frac{3}{5}ma^2$。绳是轻而不可伸长的，并且在 C 上不打滑。由于 B 是光滑的，AB 和 BC 两段绳的张力（tension）T_1 相同。把 CD 段绳的张力记为 T_2；由于 C 是粗糙的，T_2 不一定等于 T_1。



设 D 以加速度 f 向下运动。支承 B 的两段绳各自缩短的长度，是 CD 伸长量的一半，所以 B 以加速度 $\frac{1}{2}f$ 上升；又因为绳在 C 上不打滑，C 的角加速度（angular acceleration）是 f/a。运动方程为：

$$\begin{aligned} D\text{ (向下)}: &\quad Mg - T_2 = Mf, \\ B\text{ (向上)}: &\quad 2T_1 - mg = \tfrac{1}{2}mf, \\ C\text{ (对其轴取矩)}: &\quad (T_2 - T_1)a = \tfrac{3}{5}ma^2 \cdot \frac{f}{a}. \end{aligned}$$

把 $T_2 = Mg - Mf$ 和 $T_1 = \frac{1}{2}mg + \frac{1}{4}mf$ 代入最后一条方程，

$$Mg - Mf - \tfrac{1}{2}mg - \tfrac{1}{4}mf = \tfrac{3}{5}mf \quad\Longrightarrow\quad f\left(M + \tfrac{17}{20}m\right) = g\left(M - \tfrac{1}{2}m\right),$$

所以

$$f = \frac{10(2M - m)g}{20M + 17m}.$$

这是常数，而且正因为 $m < 2M$ 才是正数：题目给出这个条件，原因就在这里。它说明 D 确实会由静止开始下降。因此 t 秒后，D 向下运动的速率为

$$v = ft = \frac{10(2M - m)gt}{20M + 17m},$$

B 以 $\frac{1}{2}v$ 上升，而 C 以角速率 v/a 转动。

（用能量验算可得相同的 f：当 D 下降了 x 时，动能（kinetic energy）为 $\frac{1}{2}(M + \frac{1}{4}m + \frac{3}{5}m)\dot{x}^2$，而失去的势能（potential energy）为 $(M - \frac{1}{2}m)gx$。）

第 (ii) 部分：冲量

> ? **想一想** B 被截停之后，D 还能运动吗?

只要绳保持拉紧，D 的速率总是 B 的速率的两倍，因为 A 是固定的，而 AB 和 BC 的长度每次都改变相同的量。一旦 B 静止，这两段的长度都固定了，于是再没有绳可以绕过 C，D 也必须停下来，C 亦然。绳确实保持拉紧：D 正在远离 C，所以它把 CD 拉紧；而仍在转动的 C 则从 BC 一侧把绳往上扯，所以那一段也被拉紧。（事实上，算出来的冲击张力（impulsive tension）在 CD 中是 Mv，在 BC 中是 $(M+\frac{3}{5}m)v$，两者皆为正数，印证了这一点。）

所以 D 的速度由向下的 v 降至零，而（绳）作用于 D 的冲量等于它的动量改变：

$$\text{冲量施于}D = Mv = \frac{10M(2M-m)gt}{20M+17m} \quad \text{，方向铅垂向上。}$$

验算

- 若 $m \to 0$（轻滑轮），则 $f \to g$，冲量为 Mgt：D 只是自由下落，一如所料。
- 若 $m = 2M$，冲量为零：系统处于平衡状态，根本不会开始运动。
- 取 $M = 3$、$m = 2.5$、$g = 9.8$、$t = 1.3$，以数值方法逐步模拟运动，得 $Mv \approx 13.0507$，与公式吻合，而所得的动能亦与失去的势能相符。用数值积分算出的转动惯量比值是 0.6000。

常见错误

- 把 C 两边的张力当作相同。滑轮 C 有质量而且粗糙，正是两边张力之差令它转动。
- 忘记 B 的速率只有 D 的一半；这使有效质量中出现的是 $\frac{1}{4}m$，而不是 m。
- 只给出冲量的大小而不说明方向：它向上作用于 D。

STEP 之外

用单一坐标把动能写成 $\frac{1}{2}M_{\text{有效}}\dot{x}^2$，正是拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）的起点；在那里，像滑轮几何这样的约束从一开始就已内置，张力根本不会出现。像截停 B 这类突然施加的约束，也可用同样的方法，以冲量方程处理。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）以这种风格讲述刚体转动（rigid-body rotation）和冲量。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。