详细解答

STEP III 1989，第 13 题

力学 • 简谐运动

> **STEP III 1989，第 13 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q13

关键思路

每条弦线都由 O（在桌面之下）出发，向上穿过所属的小孔，再沿桌面连到 P。桌下的一段长度恒为 a，正好等于自然长度（natural length），所以每条弦线的伸长量（extension）就是 P 与该小孔之间的距离。这样每个张力（tension）都与一个向量成正比；用位置向量（position vector）来表示，五个力只需一行便可加起来，因为五个小孔对称排列，它们的位置向量之和为零。

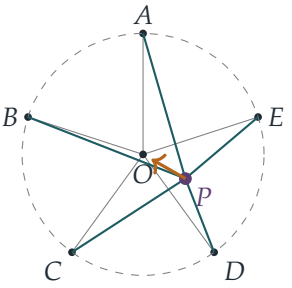
解答

建立模型

把 P 视为光滑桌面上的质点（particle），弦线视为轻弹性弦线（light elastic string），小孔视为光滑，因此每条弦线上各处的张力相同。取桌面上的 O 为原点，设 $\mathbf{r}$ 为 P 的位置向量，并设 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_5$ 为 $A, \ldots, E$ 的位置向量，每个的长度均为 a。

穿过第 i 个小孔的弦线由两段组成：一段是由 O（在桌面之下，位于中心的正下方）到小孔的垂直部分，长度为 a；另一段在桌面上，长度为 $|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|$。弦线的总长度是 $a + |\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|$，所以伸长量是 $|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|$。这个量永不为负，因此无论 P 在哪里，每条弦线都是拉紧的（或当 P 位于小孔时刚好松弛）：不会有弦线松掉而令方程改变。根据虎克定律（Hooke's law），张力为 $\frac{\lambda}{a}|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|$，而在桌面上它把 P 拉向小孔，方向为单位向量 $\frac{\mathbf{a}_i - \mathbf{r}}{|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|}$。所以第 i 条弦线作用于 P 的力是

$$\frac{\lambda}{a}|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}| \cdot \frac{\mathbf{a}_i - \mathbf{r}}{|\mathbf{a}_i - \mathbf{r}|} = \frac{\lambda}{a}(\mathbf{a}_i - \mathbf{r}).$$



蓝绿色的线是从上方俯视时桌面上的五条弦线；琥珀色箭头表示作用于 P 的合力（resultant force），它正正指向 O。

第一部分

作用于 P 的垂直方向的力（重量与法向反作用力）互相平衡。把五个水平方向的力相加，

$$\mathbf{F} = \frac{\lambda}{a}\sum_{i=1}^{5}(\mathbf{a}_i - \mathbf{r}) = \frac{\lambda}{a}\Big(\sum_{i=1}^{5}\mathbf{a}_i\Big) - \frac{5\lambda}{a}\mathbf{r}.$$

? **想一想** 为甚么 $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5 = \mathbf{0}$?

把整个图形绕 O 旋转 72°，五个小孔只是互相置换，所以总和 $\mathbf{s} = \sum \mathbf{a}_i$ 保持不变。但旋转 72° 后仍然不变的向量只有零向量，所以 $\mathbf{s} = \mathbf{0}$。（换句话说，五次单位根（fifth roots of unity）之和为零。）

因此由牛顿第二定律（Newton's second law）可得

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{5\lambda}{a}\mathbf{r}, \qquad \text{即} \qquad \ddot{\mathbf{r}} = -\omega^2\mathbf{r} \quad \text{其中} \quad \omega^2 = \frac{5\lambda}{am}.$$

P 由 F 从静止开始运动，所以 $\mathbf{r}(0) = \overrightarrow{OF}$ 及 $\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{0}$。解为 $\mathbf{r} = \cos(\omega t)\,\overrightarrow{OF}$，所以 P 沿直线 FO 来回运动（去到 F 关于 O 的反射点再折返），而它相对于 O 的位移满足简谐运动（simple harmonic motion）的方程。周期（period）为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{am}{5\lambda}},$$

这正是所需的结果。（注意这对任何起点 F 都成立，并不限于小位移：力的规律是完全线性的。）

最后部分

现在弦线 PAO 的弹性模量（modulus）为 $k\lambda$，所以它作用于 P 的力是 $\frac{k\lambda}{a}(\mathbf{a}_1-\mathbf{r})$。利用 $\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4+\mathbf{a}_5=-\mathbf{a}_1$，

$$\begin{aligned}\mathbf{F}&=\frac{k\lambda}{a}(\mathbf{a}_1-\mathbf{r})+\frac{\lambda}{a}\sum_{i=2}^{5}(\mathbf{a}_i-\mathbf{r})\\&=\frac{k\lambda}{a}(\mathbf{a}_1-\mathbf{r})+\frac{\lambda}{a}(-\mathbf{a}_1-4\mathbf{r})\\&=\frac{\lambda}{a}[(k-1)\mathbf{a}_1-(k+4)\mathbf{r}]=-\frac{(k+4)\lambda}{a}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0),\qquad \mathbf{r}_0=\frac{k-1}{k+4}\mathbf{a}_1.\end{aligned}$$

所以平衡位置（equilibrium position）是 OA 上的点 $\mathbf{r}_0$（该处 $\mathbf{F}=\mathbf{0}$），并且

$$\ddot{\mathbf{r}}=-\frac{(k+4)\lambda}{am}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0).$$

若把 P 由 $\mathbf{r}_0$ 沿 OA 移开，然后从静止释放，则 $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ 起初与 $\mathbf{a}_1$ 平行，加速度又恒与 $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ 平行，而初速度为零。所以与之前完全一样，$\mathbf{r}-\mathbf{r}_0=\cos(\omega' t)(\mathbf{r}(0)-\mathbf{r}_0)$：$P$ 沿 OA 作直线运动，以 $\mathbf{r}_0$ 为中心作简谐运动，角频率（angular frequency）为 ω'，其中

$$\omega'^2=\frac{(k+4)\lambda}{am}.$$

周期为 $T/2$，当且仅当 $\omega'=2\omega$，即 $\omega'^2=4\omega^2$：

$$\frac{(k+4)\lambda}{am}=\frac{20\lambda}{am}\quad\Longrightarrow\quad k+4=20\quad\Longrightarrow\quad k=16.$$

当 $k=16$ 时，平衡位置是 $\mathbf{r}_0=\frac{15}{20}\mathbf{a}_1$，即由 O 到 A 的四分之三处。（要令模型成立，振幅（amplitude）必须小于 $\frac{1}{4}a$，使 P 不会到达 A 处的小孔。）

验算

- 代入 $k=1$ 便回到第一部分：$\mathbf{r}_0=\mathbf{0}$ 及 $\omega'^2=5\lambda/(am)$。
- 单位：λ 是一个力，所以 $\lambda/(am)$ 的单位是 $\mathrm{N/(m\,kg)}=\mathrm{s^{-2}}$，而 T 是时间。
- 我们在 1000 个随机位置把五个张力向量相加（取 $a=1.3$、$m=0.7$、$\lambda=2.1$），结果恰好是 $-5\lambda\mathbf{r}/a$；而当 $k=16$ 时恰好是 $-20\lambda(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)/a$。由 $(0.4,-0.3)$ 出发，以数值方法逐步计算运动，P 在时间 $T\approx 1.85$ 后回到起点，并一直留在通过 O 的直线上；当 $k=16$ 时由 $\mathbf{r}_0+0.1a\,\hat{\mathbf{a}}_1$ 出发，则在 $T/2$ 后回到起点。

常见错误

- 把伸长量当作 $|\mathbf{a}_i-\mathbf{r}|-a$ 或 $|\mathbf{r}|$：自然长度 a 刚好全部用于桌下的那一段。

- 用角度和三角学来分解五个张力。这样做是可以的，但用向量的话，各项一眼便可看出互相抵消。
- 假设新的振动仍以 O 为中心：较硬的弦线会把平衡位置拉向 A。

STEP 之外

二维空间中的力 $\mathbf{F} = -c\,\mathbf{r}$ 给出各向同性谐振子（isotropic harmonic oscillator）：一般的运动（初速度带有横向分量时）是以平衡点为中心的椭圆，而且每条轨道的周期都相同。它与平方反比定律（inverse-square law）是仅有的两种令每条有界轨道都闭合的有心力（central force），这就是伯特兰定理（Bertrand's theorem）。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教材）正是以这种向量方式处理振子和有心力。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。