详细解答

STEP III 1989，第 12 题

力学 · 旋转参考系

STEP III 1989，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/89-s3-q12

关键思路

平面是光滑（smooth）的，而杆是轻（light）杆并可绕枢轴自由转动，所以作用于 P 的水平力只能沿杆的方向。因此，P 的加速度在垂直于 AP 方向上的分量必定为零。只要求出这个分量，令它等于零，便得到关于 ϕ 的单摆方程（pendulum equation），再用惯常的“乘以 $\dot\phi$ 再积分”技巧，便可求出 $\dot\phi$。

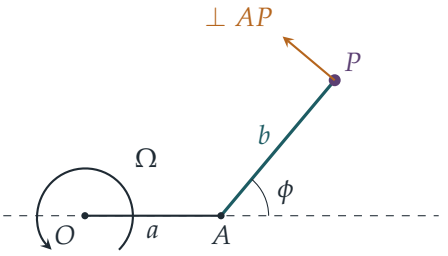
解答

模型与设置

把 P 看成光滑平面上的一个质点（particle），把杆看成轻而刚硬的杆，可绕 A 自由转动。我们在一个固定的惯性参考系（inertial frame）中考虑问题。用复数表示平面上的位置，以 O 为原点，实轴取为 $t=0$ 时 OA 的方向，并取 $\Omega>0$ 为逆时针方向。由于 A 固定在平面上，它沿半径为 a 的圆运动；而 AP 与 OA 的延长线成角 ϕ，该延长线本身已转过 Ωt。因此，记 $\theta=\Omega t+\phi$，便有

$$z_A = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}, \qquad z_P = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} + b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

这里 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 是沿 AP 方向的单位向量，而 $\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 是垂直于 AP、指向 ϕ 增加方向的单位向量。



加速度的垂直分量

求导，其中 $\dot\theta = \Omega + \dot\phi$ 及 $\ddot\theta = \ddot\phi$（因为 Ω 是常数），得

$$\dot z_P = \mathrm{i}a\Omega\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} + \mathrm{i}b(\Omega+\dot\phi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$
$$\ddot z_P = -a\Omega^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} + b(\mathrm{i}\ddot\phi - (\Omega+\dot\phi)^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

要把加速度分解为沿 AP 和垂直于它的分量，可写 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\cos\phi - \mathrm{i}\sin\phi)$。于是

$$\ddot z_P = [-a\Omega^2\cos\phi - b(\Omega+\dot\phi)^2]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + [\,b\ddot\phi + a\Omega^2\sin\phi\,]\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

所以，P 的加速度在垂直于 AP 方向（指向 ϕ 增加的一方）的分量是

$$\boxed{\,b\,\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} + a\Omega^2\sin\phi\,}$$

（第一项是我们熟悉的 $b\ddot\phi$，来自绕 A 的圆周运动。第二项来自 A 本身指向 O 的向心加速度（centripetal acceleration）$a\Omega^2$，再分解到垂直于杆的方向。）

求 $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$

? **想一想** 为甚么加速度的这个分量必定为零?

作用于 P 的力有：它的重量和法向反作用力（normal reaction）（两者都是铅垂的，并且互相抵消）；没有摩擦力（平面是光滑的）；以及杆所施的力。一根可绕 A 自由转动的轻杆，只能沿自身的长度方向推或拉。所以在垂直于 AP 的方向上没有水平力，由牛顿第二定律（Newton's second law）得

$$b\ddot\phi + a\Omega^2\sin\phi = 0.$$

这就是单摆方程。乘以 $\dot\phi$ 再积分，得

$$\tfrac{1}{2}b\dot\phi^2 = a\Omega^2\cos\phi + C.$$

初始条件。开始时 O, A, P 在同一直线上。由于 $b > a$，P 不可能位于 O 与 A 之间，我们取 P 在 A 之外的一方，所以在 $t = 0$ 时 $\phi = 0$。这时两个指数函数的值都是 1，而

$$\dot{z}_P(0) = \mathrm{i}[(a+b)\Omega + b\dot{\phi}(0)],$$

它垂直于 OP（即实轴）。留意 $(a+b)\Omega$ 正是平面上位于 P 正下方那一点的速率，而 $b\dot{\phi}(0)$ 则是 P 相对于平面的速率。题目印出的速率是 $(a+2\sqrt{ab})\Omega$，但这看来是 $(a+b+2\sqrt{ab})\Omega = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\Omega$ 的误印，因为后者才能得出题目所述的结果（见文末的备注）。采用这个值，P 相对于平面的速率是 $2\sqrt{ab}\,\Omega$，所以

$$\dot{\phi}(0) = 2\Omega\sqrt{a/b}.$$

把 $\phi = 0$ 代入能量方程，得 $\frac{1}{2}b \cdot 4a\Omega^2/b = a\Omega^2 + C$，所以 $C = a\Omega^2$，而

$$\tfrac{1}{2}b\dot{\phi}^2 = a\Omega^2(1+\cos\phi) = 2a\Omega^2\cos^2\tfrac{\phi}{2}, \qquad \text{所以} \qquad \dot{\phi}^2 = \frac{4a\Omega^2}{b}\cos^2\tfrac{\phi}{2}.$$

开始时 $\dot{\phi} > 0$，而 $\dot{\phi}$ 只有经过零才能改变正负号，这需要 $\cos\frac{\phi}{2} = 0$，即 $\phi = \pm\pi$。所以只要 $-\pi < \phi < \pi$，我们便取正根：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = 2\Omega\sqrt{\frac{a}{b}}\cos\frac{\phi}{2}}$$

P 永不越过 OA

> **想一想** ϕ 难道不可以慢慢爬升到 π，然后越过它吗?

只有当 ϕ 是 π 的倍数时，P 才会在直线 OA 上（当 $\phi = \pi$ 时，它位于 O 之外、距离为 $b-a$ 的地方）。由于当 $0 \le \phi < \pi$ 时 $\dot{\phi} > 0$，ϕ 由 0 开始递增，而回到这条直线上的唯一途径就是到达 $\phi = \pi$。我们解出这个方程，从而证明这种情况永不发生。分离变量（separating the variables），并设 $k = \sqrt{a/b}$，得

$$\int_0^{\phi} \sec\tfrac{u}{2}\,\mathrm{d}u = 2k\Omega t \quad\Longrightarrow\quad \ln\Big(\sec\tfrac{\phi}{2} + \tan\tfrac{\phi}{2}\Big) = k\Omega t.$$

设 $s = \sin\frac{\phi}{2}$，则 $\sec\frac{\phi}{2} + \tan\frac{\phi}{2} = \frac{1+s}{\sqrt{1-s^2}} = \sqrt{\frac{1+s}{1-s}}$，所以左边等于 $\frac{1}{2}\ln\frac{1+s}{1-s} = \operatorname{artanh} s$。因此

$$\sin\frac{\phi}{2} = \tanh\Big(\Omega t\sqrt{\tfrac{a}{b}}\Big).$$

对于每个 $t > 0$，右边都严格介乎 0 与 1 之间，所以对所有 $t > 0$ 都有 $0 < \phi < \pi$。于是 P 始终严格地留在直线 OA 的同一侧。当 $t \to \infty$ 时，它趋近这条直线（趋近 O 之外的那一点），但永远不会到达，所以 P 永不越过 OA。 ■

（不解方程的做法：$\phi = \pi, \dot{\phi} = 0$ 是单摆方程的一个平衡点（equilibrium），而在它附近，$\psi = \pi - \phi$ 满足 $\dot{\psi} \approx -k\Omega\psi$，所以 ψ 以指数形式衰减，永不为零。）

关于印出的速率的备注。如果我们按字面把速率取为 $(a+2\sqrt{ab})\Omega$，则 $\dot\phi(0)=(2k-1)\Omega$，而同样的积分给出 $\dot\phi^2=\Omega^2[(2k-1)^2-4k^2\sin^2\frac{\phi}{2}]$。这并不是一个简洁的式子。这时 P 会绕 $\phi=0$ 来回摆动（每摆一次都越过 OA 的延长线），如果 $b<16a$；又或者转足一整圈，越过 OA，如果 $b>16a$。所以印出的数值不可能是出题者的原意。

验算

- 令 $a=0$，A 便落在 O 上，这时 $\dot\phi\equiv 0$：P 只是随着平面以速率 $b\Omega$ 一起转动。这是对的，因为初始速率变成了 $b\Omega$。
- 单位：$\Omega\sqrt{a/b}$ 是一个变率，所以它的单位是 s^{-1}，正如 $\dot\phi$ 应有的单位。
- 我们以数值方法（RK4）逐步求解 $b\ddot\phi=-a\Omega^2\sin\phi$，取 $a=1, b=3, \Omega=1.3$。在 $t=2$ 时，得出 $\phi\approx 2.2644$ 和 $\dot\phi\approx 0.6375$，与 $2\arcsin\tanh(\Omega t\sqrt{a/b})$ 和 $2\Omega\sqrt{a/b}\cos\frac{\phi}{2}$ 相符，准确至 10 位有效数字。在 $t=10$ 时，$\phi\approx 3.1394<\pi$。

常见错误

- 忘记了参考系本身对 P 的初始速度所贡献的 $(a+b)\Omega$，把题目给出的速率当成相对于平面的速率。
- 把 P 的加速度只写成绕 A 作圆周运动的加速度。枢轴 A 本身也在加速，$a\Omega^2\sin\phi$ 这一项正是由此而来。
- 把 $a\Omega^2\sin\phi$ 的正负号弄错。如果符号错了，$\phi=0$ 便会是不稳定的，这不符合物理实际，因为“离心”拉力是背向 O 的。

STEP 之外

从旋转的平面上看，P 是一个单摆，悬挂在大小为 $a\Omega^2$、方向沿 OA 延长线的均匀“重力”之中。科里奥利力（Coriolis force）沿杆的方向作用，所以它不做功，可以不予考虑。题目的初始条件令运动恰好落在 分界线（*separatrix*）上：这是来回摆动与越过顶点之间的临界情况，此时单摆需要无限长的时间才到达倒立位置。旋转参考系（rotating frames）、虚拟力（fictitious forces）以及这类相平面（phase plane）图像，可参阅 Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（一本大学力学入门教科书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。