详细解答

STEP III 1989，第 11 题

力学 • 球体的斜碰撞

STEP III 1989，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/89-s3-q11

关键思路

首先确定碰撞一刻的几何关系：它决定了连心线（line of centres）的方向，其余一切都由此而来。然后套用光滑（smooth）球体斜碰撞（oblique impact）而其中一个球受约束（constraint）时的标准方法。两球之间的冲量（impulse）沿连心线作用。牛顿恢复定律（Newton's law of restitution）适用于沿该直线的速度分量。至于动量守恒（conservation of momentum），由于绳子或支点（pivot）本身也提供冲量，这里并不成立；我们改用不受约束影响的那一条方程：有绳子时用 A 的水平动量，有杆时用对 O 的角动量（angular momentum）。

解答

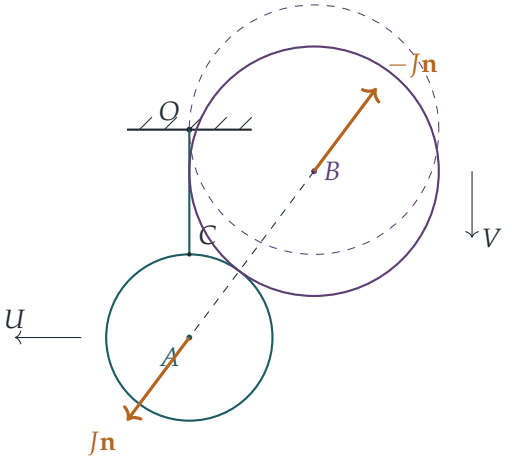
碰撞时的几何关系

我们把两个球都视为光滑而均匀（uniform），并把绳子视为轻而不可伸长（light and inextensible）。碰撞前绳子垂直悬挂。由于 C 位于直线 OA 上，我们有 $OA = 3a + 2a = 5a$，而 A 在 O 的正下方。

球 B 起初的位置使 $OB = 3a$ 为水平，然后垂直下落。设它下落的距离为 h。碰撞时两球相切，所以 $AB = 2a + 3a = 5a$。A 与 B 的水平距离是 $3a$，所以两者的垂直距离是 $\sqrt{25a^2 - 9a^2} = 4a$。因此 B 在 A 之上 $4a$ 处，亦即在 O 的水平线之下 a 处，故 $h = a$。

所以连心线构成一个 3–4–5 三角形：由 B 到 A，它沿水平方向（朝向 OA）走 $3a$，再向下走 $4a$。设 $\mathbf{n}$ 为由 B 指向 A 的单位向量（unit vector），并取 x 轴为水平，方向由 OA 指向 B。那么

$$\mathbf{n} = \left(-\tfrac{3}{5}, -\tfrac{4}{5}\right).$$



虚线的球标示 B 的起始位置，实线的球则标示它在碰撞时的位置。

有绳子时的碰撞

设 J 为两球之间冲量的大小，所以 A 受到 $J\mathbf{n}$，而 B 受到 $-J\mathbf{n}$。两球都是光滑的，所以 $J\mathbf{n}$ 沿连心线作用，并通过 A。绳子的冲量沿 OC 作用，同样通过 A。所以没有任何东西令球 A 自转，A 的运动就如同一个质点（particle），在以 O 为圆心、半径为 $5a$ 的圆上运动。紧接碰撞之后绳子仍然垂直，所以 A 沿水平方向运动，速率为 U，方向为 x 的负方向。

*球 A，水平方向。*绳子不提供水平冲量，所以

$$3mU = \tfrac{3}{5}J, \qquad \text{即} \qquad J = 5mU.$$

（在垂直方向，绳子提供一个向上的冲量 $\frac{4}{5}J$，抵消了 $J\mathbf{n}$ 向下的部分。这个量是正数，所以绳子确实保持拉紧。）

*球 B。*碰撞前 $\mathbf{v}_B = (0, -V)$，它沿 $\mathbf{n}$ 的分量是 $\frac{4}{5}V$。冲量 $-J\mathbf{n}$ 只改变这个分量，并使它减少 $J/(25m)$：

$$\mathbf{v}'_B \cdot \mathbf{n} = \tfrac{4}{5}V - \frac{J}{25m} = \tfrac{4}{5}V - \tfrac{1}{5}U.$$

? **想一想** 为甚么我们不能直接沿连心线运用动量守恒？

绳子对 A 的冲量是垂直的，而它沿 $\mathbf{n}$ 有一个分量。所以沿 $\mathbf{n}$ 的总动量会改变。唯一没有外来冲量作用的方向是水平方向，而那正是我们对 A 所用的方程。

*恢复定律。*沿 $\mathbf{n}$ 方向，靠近速率（speed of approach）是 $\frac{4}{5}V - 0$，因为 A 起初静止。分离速率（speed of separation）是 $\mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v}'_B \cdot \mathbf{n}$，其中 $\mathbf{v}'_A \cdot \mathbf{n} = (-U)(-\frac{3}{5}) = \frac{3}{5}U$。所以

$$\tfrac{3}{5}U - \left(\tfrac{4}{5}V - \tfrac{1}{5}U\right) = \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{4}{5}V \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{4}{5}U = \tfrac{7}{5}V \quad \Longrightarrow \quad U = \tfrac{7}{4}V.$$

有杆时的碰撞

现在球与杆组成单一个刚体（rigid body），绕 O 转动。支点可以提供任何方向的冲量，所以水平动量不再守恒。但支点的冲量作用于 O，所以我们对 O 取矩（take moments）。根据平行轴定理（parallel axis theorem），它对 O 的转动惯量（moment of inertia）是

$$I = \tfrac{2}{5}(3m)(2a)^2 + 3m(5a)^2 = \tfrac{24}{5}ma^2 + 75ma^2 = \tfrac{399}{5}ma^2.$$

冲量 $J\mathbf{n}$ 的作用线通过 A，而它位于 O 之下 $5a$ 的深度。只有它的水平分量 $\frac{3}{5}J$ 对 O 有矩，而该矩为 $5a \cdot \frac{3}{5}J = 3aJ$。若刚体在紧接碰撞之后的角速率（angular speed）是 ω，则 A 以速率 $U' = 5a\omega$ 沿水平方向运动，并且

$$I\omega = 3aJ \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{399}{5}ma^2 \cdot \frac{U'}{5a} = 3aJ \quad\Longrightarrow\quad J = \tfrac{133}{25}\,mU'.$$

关于 B 的方程和恢复定律的方程与之前完全相同，因为它们只涉及沿 $\mathbf{n}$ 的分量。所以

$$\tfrac{3}{5}U' - \left(\tfrac{4}{5}V - \frac{J}{25m}\right) = \tfrac{3}{5}V \quad\Longrightarrow\quad \left(\tfrac{3}{5} + \tfrac{133}{625}\right)U' = \tfrac{7}{5}V \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{508}{625}U' = \tfrac{7}{5}V,$$

所以 $U' = \frac{875}{508}V$。把这个结果与 $U = \frac{7}{4}V$ 比较，

$$\frac{U'}{U} = \frac{875}{508} \cdot \frac{4}{7} = \frac{500}{508} = \frac{125}{127},$$

所以 A 在紧接碰撞之后的速率是 $125U/127$，正如题目所求。

答案比之前稍小，这是合理的。有绳子时，A 抵抗水平运动的表现就像一个质量为 $3m$ 的质点。有杆时，球还必须开始转动，而它在 A 处的等效水平质量变成 $I/(5a)^2 = \frac{399}{125}m$，比 $3m$ 略大。

验算

- 能量：取 $m = a = V = 1$，碰撞前的动能（kinetic energy）是 12.5。碰撞后，有绳子时是 11.625，有杆时约为 11.58。两者都较小，在 $e < 1$ 时必然如此。
- 弹性极限情况：取 $e = 1$ 并用绳子，同样的步骤给出 $\frac{4}{5}U = \frac{8}{5}V$，所以 $U = 2V$，而动能恰好守恒。这确认了正负号无误。
- 用电脑以精确分数求解两次碰撞，取 $a = m = V = 1$。结果是 $U = 7/4$ 和 $U' = 875/508$，得出比值 $125/127$。电脑亦核对了 B 的切向速度（tangential velocity）不变，以及 B 在接触前下落的距离为 a。

常见错误

- 沿连心线运用总动量守恒。绳子或支点会提供外来冲量，而该冲量在这个方向上有分量。

- 忘记杆上的球会转动。它对 O 的转动惯量除了 $3m(5a)^2$ 之外，还需要 $\frac{2}{5}(3m)(2a)^2$ 这一项。
- 把连心线当作成 45° 角，或当作垂直。相切的条件决定了它构成一个 3–4–5 三角形。

STEP 之外

受约束的碰撞让我们初次接触*刚体的冲击运动*（impulsive motion of rigid bodies）。一般的法则是：固定支点上的冲量，不会出现在对该支点的角动量方程之中。由此可引伸出*撞击中心*（centre of percussion）的概念：敲击一个装有支点的物体时，若击中这一点，支点便完全感受不到冲量，这就是板球棒有“甜蜜点”的原因。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）正是以这个程度讲解角动量和刚体冲量。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。