详细解答

STEP III 1989，第 10 题

纯数学 · 黎曼和

> **STEP III 1989，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q10

本题在 *Beyond STEP* 第 4.1 节甚么是积分？中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch04/riemann.html

关键思路

连续整数之积（product of consecutive integers）是 r^5 的“下降幂”（falling power）版本，而且可以用裂项相消（telescoping）求和，与 r^5 的积分如出一辙：两个相邻的六项乘积之差，等于一个五项乘积的六倍。第 (i) 和第 (ii) 部分分别给出一个略大于和一个略小于 $\sum r^5$ 的乘积之和。第 (iii) 部分再把 x^5 的两个黎曼和（Riemann sum）夹在这两个界之间，而两个界趋向同一个极限。

解答

第 (i) 部分

设 $P(r) = r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)$。那么 $P(r)$ 与 $P(r-1) = (r-1)r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)$ 有五个公共因子 $r(r+1)\cdots(r+4)$，所以

$$\begin{aligned} P(r) - P(r-1) &= r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)\big[(r+5)-(r-1)\big] \\ &= 6\,r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4). \end{aligned}$$

由 $r = 1$ 加至 n，右边裂项相消：

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4) &= \tfrac{1}{6}\sum_{r=1}^{n}\big[P(r)-P(r-1)\big] = \tfrac{1}{6}\big[P(n)-P(0)\big] \\ &= \tfrac{1}{6}\,n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5), \end{aligned}$$

因为 $P(0) = 0$。（对 n 使用归纳法（induction）同样可行；归纳步骤用的正是同一个因式分解。）

至于推论：若 $r \geq 1$，则对 $k = 1, 2, 3, 4$，每个因子都满足 $r + k > r > 0$，所以

$$r^5 < r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4) \qquad (r \geq 1).$$

把 $r = 1, \ldots, n$ 的这些严格不等式（strict inequality）相加，便得 $\sum_{r=1}^{n} r^5 < \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$，正是所求。

第 (ii) 部分

现在我们需要一个位于 r^5 之下的乘积，所以把各因子向下平移：改用 $(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r$。设 $Q(r) = (r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r(r+1)$，同样的因式分解给出

$$\begin{aligned} Q(r) - Q(r-1) &= (r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r\big[(r+1) - (r-5)\big] \\ &= 6\,(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r. \end{aligned}$$

由 $r = 0$ 加至 $n-1$：

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{n-1} (r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r &= \tfrac{1}{6}\big[Q(n-1) - Q(-1)\big] \\ &= \tfrac{1}{6}\,(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n, \end{aligned}$$

因为 $Q(-1) = (-5)(-4)(-3)(-2)(-1) \cdot 0 = 0$。

? **想一想** 对和式中的每一个 r，$(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r < r^5$ 是否都成立?

不尽然，而这正是条件 $n > 1$ 发挥作用的地方。我们逐项比较：

- $r = 0$：两边都是 0，所以只有等式成立。
- $r = 1, 2, 3, 4$：乘积中有一个因子为零，所以乘积是 $0 < r^5$。
- $r \geq 5$：对 $k = 1, 2, 3, 4$，每个因子都满足 $0 < r - k < r$，所以乘积 $< r^5$。

因此对所有 $r \geq 0$，都有 $(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r \leq r^5$，而且对每个 $r \geq 1$，不等式都是严格的。若 $n > 1$，由 $r = 0$ 至 $n-1$ 的和包含 $r = 1$ 这一项，所以最少有一个不等式是严格的，于是

$$\sum_{r=0}^{n-1} r^5 > \tfrac{1}{6}(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n.$$

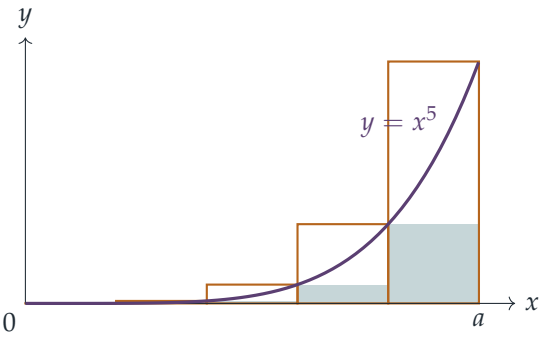
（当 $n = 1$ 时，两边都是 0，这就是需要该条件的原因。）

第 (iii) 部分

取 $\mathrm{f}(x) = x^5$，这是一个递增函数（increasing function）。定义中的两个和是

$$L_n = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{a}{n}\left(\frac{ra}{n}\right)^5 = \frac{a^6}{n^6}\sum_{r=0}^{n-1} r^5, \qquad U_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{a}{n}\left(\frac{ra}{n}\right)^5 = \frac{a^6}{n^6}\sum_{r=1}^{n} r^5.$$

当 $a > 0$ 时，它们分别是曲线下方和上方各长方形的面积之和：



（涂色部分：L_n；框线部分：U_n；图中 $n = 5$。）不过，以下的代数运算并不需要 $a > 0$：对任何 $a \neq 0$ 都有 $a^6 > 0$，而 $a = 0$ 的情况显然成立，因为每个和都是 0。

对 L_n 使用第 (ii) 部分（其中 $n > 1$），对 U_n 使用第 (i) 部分，

$$L_n > \frac{a^6}{6n^6}(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n = \frac{a^6}{6}\prod_{k=1}^{5}\left(1-\frac{k}{n}\right),$$

$$U_n < \frac{a^6}{6n^6}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) = \frac{a^6}{6}\prod_{k=1}^{5}\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

此外 $U_n - L_n = \dfrac{a^6}{n^6}\left(n^5 - 0^5\right) = \dfrac{a^6}{n} > 0$，所以综合起来

$$\frac{a^6}{6}\prod_{k=1}^{5}\left(1-\frac{k}{n}\right) < L_n < U_n < \frac{a^6}{6}\prod_{k=1}^{5}\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

当 $n \to \infty$ 时，每个括号都趋向 1，所以外侧的两个界都趋向 $\frac{1}{6}a^6$。根据夹逼定理（squeeze theorem，又称 sandwich theorem），L_n 和 U_n 都收敛（converge），而且收敛至同一个极限 $\frac{1}{6}a^6$。所以定义中的两个极限都存在而且相等，因此

$$\int_0^a x^5\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{6}a^6.$$

验算

- 第 (i) 部分的小数值情况：当 $n = 1$ 时，$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 = \frac{1}{6} \cdot 720$；当 $n = 2$ 时，$120 + 720 = 840 = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$。

- 第 (i) 和第 (ii) 部分的恒等式（identity），以及两个不等式，对 200 以内的每个 n 都准确成立（已用电脑核对）。
- 取 $a = 1$ 和 $n = 1000$：$L_n \approx 0.166167$，$U_n \approx 0.167167$，分别位于 $\frac{1}{6} \approx 0.166667$ 的两侧，而且 $U_n - L_n = 0.001 = a^6/n$。

常见错误

- 声称对所有 $r \geq 0$ 都有 $(r-4)\cdots r < r^5$：在 $r = 0$ 时其实是等式，所以严格不等式要靠 $r = 1$ 这一项，亦即需要 $n > 1$。
- 只证明 L_n 和 U_n 有界（bounded），或只证明 $U_n - L_n \to 0$。定义要求两个极限都*存在*；夹逼定理则一并给出存在性和极限值。

STEP 之外

第 (iii) 部分是黎曼（Riemann）积分（或称达布（Darboux）积分）的一次亲手实践：若一个函数的下和（lower sum）与上和（upper sum）可以夹在一起，该函数便是可积（integrable）的；对单调函数（monotonic function）而言，两者之差恒为 $(b-a)\,|f(b) - f(a)|/n$，所以闭区间（closed interval）上的每个单调函数都可积。第 (i) 和第 (ii) 部分的乘积分别是“上升阶乘幂”（rising factorial power）和“下降阶乘幂”（falling factorial power），它们令有限差分演算（calculus of finite differences）看起来与普通的微积分一模一样。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本实分析入门书）正是以这种方式建立积分理论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。