详细解答

STEP III 1989，第 1 题

纯数学 · 旋转曲面

STEP III 1989，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/89-s3-q1

关键思路

球面是半圆的旋转曲面（surface of revolution），所以球带（zone）的面积是一个标准的旋转曲面积分。出人意表的是，被积函数（integrand）原来是常数，这正是答案只取决于两平面之间距离的原因。在第二部分，曲面分成一个圆锥（由 OP 生成）和一个球带（由弧 PR 生成）。这时第一个结果便担起了最吃力的工作，而相切的条件则提供了我们所需的直角三角形。

关于题目印出的方程，要说明一下：若右边是 c^2，圆便会通过 O，而常数 a 则从未出现。题目原意的曲线显然是

$$(x-c)^2+y^2=a^2,$$

即圆心为 $C=(c,0)$、半径为 a 的圆。由于 $c>a$，原点在圆外，所以由 O 出发的切线（tangent）存在。我们就这条曲线来解题。

解答

球带的面积

取一个半径为 r、球心在原点的球面，并选取 x 轴与两个平面垂直，这两个平面是 $x=h_1$ 和 $x=h_2$，其中 $-r\le h_1<h_2\le r$。球面由上半圆 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 绕 x 轴旋转 2π 而成，所以球带的面积是

$$S=\int_{h_1}^{h_2}2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

这里 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$，所以当 $|x| < r$ 时

$$y\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} = \sqrt{r^2-x^2}\sqrt{\frac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2}} = \sqrt{r^2-x^2}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}} = r.$$

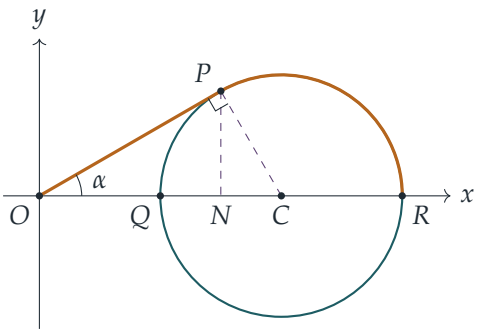
? **想一想** 在 $x = \pm r$ 处，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 是无穷大，这时会怎样?

导数（derivative）在两极处趋向无穷大，但乘积 $y\sqrt{1+(y')^2}$ 在整个 $(-r, r)$ 上都等于 r，所以它是有界的。若其中一个平面与球面相切（$h_1 = -r$ 或 $h_2 = r$），这个积分虽属反常积分（improper integral），却无伤大雅：先积分至 $h_2 - \varepsilon$，再令 $\varepsilon \to 0$ 即可。（另一个做法是以 $x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$ 作参数化（parametrise），这样便完全避开了这个问题。）因此

$$S = \int_{h_1}^{h_2} 2\pi r\,\mathrm{d}x = 2\pi r\,(h_2 - h_1),$$

也就是 $2\pi \times$ (半径) $\times$ (两平面之间的距离)，正是所求。

曲面



设 $C = (c, 0)$ 为圆心，N 为由 P 至 x 轴的垂足。那么 $Q = (c-a, 0)$，$R = (c+a, 0)$。弧 PR 是指不经过 Q 的那一段（图中以琥珀色标示）：由 P 到 R 的另一段弧会经过 Q 并绕过圆的底部，把它旋转便会扫出整个球面。

切线与过切点的半径互相垂直，所以角 OPC 是直角。在三角形 OPC 中，$OC = c$ 而 $CP = a$，所以由毕氏定理（Pythagoras' theorem）得

$$OP = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

设 α 为角 POC。那么 $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ 而 $\cos\alpha = \frac{\sqrt{c^2-a^2}}{c}$，由此得

$$PN = OP\sin\alpha = \frac{a\sqrt{c^2-a^2}}{c}, \qquad ON = OP\cos\alpha = \frac{c^2-a^2}{c}.$$

圆锥。把 OP 绕 x 轴旋转，得到一个斜高（slant height）为 $l = OP$、底半径为 PN 的圆锥。它的曲面面积是 $\pi \times$ (底半径) $\times$ (斜高)，即

$$\pi \cdot \frac{a\sqrt{c^2 - a^2}}{c} \cdot \sqrt{c^2 - a^2} = \frac{\pi a(c^2 - a^2)}{c}.$$

球带。把弧 PR 旋转，得到球面（球心 C，半径 a）上夹在两个平面之间的部分：一个是过 N 且垂直于轴的平面，另一个是在 R 处的切平面（tangent plane）。这两个平面相距

$$NR = (c + a) - \frac{c^2 - a^2}{c} = \frac{ac + a^2}{c} = \frac{a(c + a)}{c}$$

，所以由第一个结果，球带的面积是

$$2\pi a \cdot \frac{a(c + a)}{c} = \frac{2\pi a^2(c + a)}{c}.$$

总和。把两部分相加，

$$\begin{aligned} \text{面积} &= \frac{\pi a}{c}\left[(c^2 - a^2) + 2a(c + a)\right] \\ &= \frac{\pi a}{c}(c^2 + 2ac + a^2) \\ &= \frac{\pi a(c + a)^2}{c}. \end{aligned}$$

验算

- 取 $a = 1$，$c = 2$。那么 $P = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，圆锥的面积是 $\frac{3\pi}{2}$，球带的面积是 3π，所以总面积是 $\frac{9\pi}{2} \approx 14.137$。以 20 000 条短线段逼近曲线，再把所得各个圆台（frustum）的面积相加，得 14.13717。
- 当 $a \to c$ 时，P 趋近 O，圆锥随之消失。曲面变成半径为 c 的整个球面，而果然 $\pi c(2c)^2/c = 4\pi c^2$。
- 当 a 固定而 $c \to \infty$ 时，面积的增长与 πac 相若，这正是一个斜高约为 c、底半径约为 a 的细长圆锥的面积。这与我们的预期相符。

常见错误

- 以 OC 或 ON 代替 OP 作为圆锥的斜高。
- 由 C 或 Q 起量度球带的厚度，而不是由 N（即由 P 所作垂线的垂足）起量度。
- 使用公式 $2\pi rh$ 时取 $r = c$ 而非 $r = a$：被截的球面是以 C 为球心、半径为 a 的那一个，而不是任何以 O 为球心的球面。

STEP 之外

球带的结果就是阿基米德（Archimedes）定理。把球面沿水平方向投影到外接圆柱上，面积保持不变，这就是兰伯特（Lambert）等积地图投影背后的想法。它也解释了为甚么在球面上均匀地选取一点时，该点的高度服从均匀分布（uniform distribution）。旋转曲面的面积，是大学一年级向量微积分（vector calculus）课程中曲面积分（surface integral）$\iint |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$ 的第一个例子。若想从优美的几何角度认识曲率（curvature）与曲面，可参阅 Needham 的 *Visual Differential Geometry and Forms*（以图像讲解微分几何与微分形式）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。