详细解答

STEP II 1989，第 9 题

纯数学 · 矩阵指数与方程组

STEP II 1989，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/89-s2-q9

关键思路

一切都系于一个小小的计算：$\mathbf{A}^2$ 原来就是单位矩阵（identity matrix）。于是 $\mathbf{A}$ 的每个偶次幂都是 $\mathbf{I}$，每个奇次幂都是 $\mathbf{A}$，所以该级数可拆成指数级数（exponential series）的偶数项部分和奇数项部分，也就是 $\cosh t$ 和 $\sinh t$。至于微分方程（differential equation），我们仿照纯量（scalar）情况下的积分因子（integrating factor）法，由矩阵 $\mathbf{F}$ 担当 $\mathrm{e}^{\int a\,\mathrm{d}t}$ 的角色。

解答

矩阵 F

乘开可得

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-8 & 3-3 \\ -24+24 & -8+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}.$$

因此对所有 $k \geq 0$，$\mathbf{A}^{2k} = (\mathbf{A}^2)^k = \mathbf{I}$ 及 $\mathbf{A}^{2k+1} = \mathbf{A}^{2k}\mathbf{A} = \mathbf{A}$。写成 $\mathbf{I} = \frac{t^0}{0!}\mathbf{A}^0$，并把级数按 n 为偶数和奇数拆开（矩阵级数的每个元素都是绝对收敛（absolutely convergent）纯量级数的重排，所以这样做是容许的），

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}\mathbf{A}^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\mathbf{A}^{2k+1} \\ &= \mathbf{I}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} + \mathbf{A}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \mathbf{I}\cosh t + \mathbf{A}\sinh t,\end{aligned}$$

当中用到麦克劳林级数（Maclaurin series）$\cosh t = \sum t^{2k}/(2k)!$ 和 $\sinh t = \sum t^{2k+1}/(2k+1)!$。这正是所求的形式。

逆矩阵

设 $\mathbf{G} = \mathbf{I}\cosh t - \mathbf{A}\sinh t$。由于 $\mathbf{I}$ 与 $\mathbf{A}$ 可交换（commute），我们可以像处理普通数字一样乘开：

$$\mathbf{FG} = \mathbf{I}\cosh^2 t - \mathbf{A}^2\sinh^2 t + (\mathbf{A} - \mathbf{A})\cosh t \sinh t = \mathbf{I}(\cosh^2 t - \sinh^2 t) = \mathbf{I},$$

当中用到 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$ 和 $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$。同样的计算给出 $\mathbf{GF} = \mathbf{I}$，所以 $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I}\cosh t - \mathbf{A}\sinh t$。

导数

逐个元素求导（矩阵 $\mathbf{I}$ 和 $\mathbf{A}$ 都是常数矩阵），

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{I}\sinh t + \mathbf{A}\cosh t, \qquad \text{而} \qquad \mathbf{FA} = \mathbf{A}\cosh t + \mathbf{A}^2\sinh t = \mathbf{A}\cosh t + \mathbf{I}\sinh t.$$

两者相同，所以 $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{FA}$。另外留意 $\mathbf{FA} = \mathbf{AF}$，因为 $\mathbf{F}$ 是由 $\mathbf{I}$ 和 $\mathbf{A}$ 组合而成的。

微分方程

在纯量方程 $r' + ar = 0$ 中，我们乘以 e^{at}，它的导数是 $\mathrm{e}^{at}a$，于是左方恰好变成某个式子的导数。矩阵 $\mathbf{F}$ 正有这个性质，即 $\mathbf{F}' = \mathbf{FA}$，所以我们在方程的*左边*乘上 $\mathbf{F}$：

$$\mathbf{F}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} + \mathbf{FAr} = \mathbf{0}.$$

根据积法则（product rule）（只要保持各因子的次序，它对矩阵乘积同样成立），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{Fr}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r} + \mathbf{F}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{FAr} + \mathbf{F}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t},$$

这恰好就是左方。所以方程说的是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{Fr}) = \mathbf{0},$$

而 $\mathbf{Fr}$ 是一个常向量 $\mathbf{c}$。

> ? **想一想** 为甚么要在左边乘而不是在右边乘？又怎样求出 $\mathbf{c}$？

乘积 $\mathbf{rF}$ 根本没有意义（$\mathbf{r}$ 是一个 2×1 的列向量），而且积法则得出的是 $\mathbf{FAr}$，只有当 $\mathbf{F}$ 在左边时，它才与 $\mathbf{F}(\mathbf{Ar})$ 这一项吻合。至于常向量，代入 $t = 0$：这时 $\cosh 0 = 1$ 而 $\sinh 0 = 0$，所以 $\mathbf{F} = \mathbf{I}$，并且

$$\mathbf{c} = \mathbf{I}\,\mathbf{r}(0) = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}.$$

现在在 $\mathbf{Fr} = \mathbf{c}$ 的左边乘上前面已求得的 $\mathbf{F}^{-1}$：

$$\mathbf{r} = \mathbf{F}^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \cosh t\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} - \sinh t\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 8 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \cosh t\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} - \sinh t\begin{pmatrix}-3\alpha-\beta\\ 8\alpha+3\beta\end{pmatrix}.$$

读出各分量，

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha\cosh t + (3\alpha+\beta)\sinh t,\\ y(t) &= \beta\cosh t - (8\alpha+3\beta)\sinh t, \end{aligned}$$

正如所求。

验算

- 在 $t = 0$ 时，公式给出 $x = \alpha$、$y = \beta$，理应如此。
- 直接代入：$x' = \alpha\sinh t + (3\alpha+\beta)\cosh t$，而 $-(-3x-y) = 3x+y = (3\alpha+\beta)\cosh t + \alpha\sinh t$（用到 $9\alpha+3\beta-8\alpha-3\beta = \alpha$）。所以 $x' = -$(第一行，取自$\mathbf{Ar}$)，y 的情况亦类似。
- 数值上，把级数加到第 60 项，结果与 $\mathbf{I}\cosh t + \mathbf{A}\sinh t$ 吻合；而取 $\alpha = 1$、$\beta = 0$ 时，以龙格－库塔（Runge–Kutta）法解这个方程组，得出 $x(2) \approx 14.6428$，与 $\cosh 2 + 3\sinh 2$ 相符。

常见错误

- 在右边乘上 $\mathbf{F}$，又或者把 $\mathbf{AF}$ 和 $\mathbf{FA}$ 随意互换，却没有说明为何在这里可以这样做（它们可交换，是因为 $\mathbf{F}$ 是 $\mathbf{I}$ 和 $\mathbf{A}$ 的组合）。
- 拆开级数时漏掉 $\mathbf{I}$ 这一项（即 $n = 0$ 的一项），结果失去了 $\cosh t$ 的常数项 1。
- 把 $-\mathbf{A}$ 乘到 $(\alpha,\beta)^{\mathrm{T}}$ 上时弄错正负号。

STEP 之外

矩阵 $\mathbf{F}$ 就是矩阵指数（matrix exponential）$\mathrm{e}^{t\mathbf{A}}$，而这里的方法说明 $\mathbf{r}' = \mathbf{Mr}$ 的解总是 $\mathbf{r} = \mathrm{e}^{t\mathbf{M}}\mathbf{r}(0)$；本题中 $\mathbf{M} = -\mathbf{A}$，所以答案才会涉及 $\mathbf{F}^{-1} = \mathrm{e}^{-t\mathbf{A}}$。一般而言，计算 $\mathrm{e}^{t\mathbf{M}}$ 的方法是把 $\mathbf{M}$ 对角化（diagonalising）：我们的 $\mathbf{A}$ 的特征值（eigenvalues）是 ±1（这正是 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$ 的含意），$\mathrm{e}^{\pm t}$ 以至 cosh 和 sinh 就是由此而来。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）有一章把矩阵指数和微分方程组讲得很好，而 Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程）则详细讨论线性方程组。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。