详细解答

STEP II 1989，第 8 题

纯数学 · 变换群

> **STEP II 1989，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q8

关键思路

一切都建基于一条恒等式（identity）：$\Omega^3 = -1$，所以 Ω 满足第一行的二次方程，我们因而可以把 Ω 的任何次幂化为 Ω 的线性式。一旦知道 R 和 T 怎样调动这四个点，余下的计数工夫便只与这四个点有关，而与公式无关：这个群（group）必须能把 z_0 送到四个点中的每一个，而它本身已包含三个保持 z_0 不动的不同映射。至于最后一部分，不妨问问 R 和 T 属于哪一类置换（permutation）。

解答

恒等式

由于 $\Omega = e^{i\pi/3}$，我们有 $\Omega^3 = e^{i\pi} = -1$，所以

$$0 = \Omega^3 + 1 = (\Omega + 1)(\Omega^2 - \Omega + 1).$$

因为 $\Omega \neq -1$，第二个因式必为零：$\Omega^2 - \Omega + 1 = 0$，这正是所求。

我们会以下列形式运用这条式：

$$\Omega^2 = \Omega - 1, \qquad \Omega^3 = -1, \qquad \Omega^4 = -\Omega.$$

另外留意 $2\Omega - 1 = 2\cos\frac{\pi}{3} - 1 + 2i\sin\frac{\pi}{3} = i\sqrt{3} \neq 0$。

R 和 T 置换这四个点

先看 R：乘以 $\Omega^2 = e^{2i\pi/3}$ 即是绕 0 旋转 $120°$：

$$R(0) = 0, \qquad R(1) = \Omega^2, \qquad R(\Omega^2) = \Omega^4 = -\Omega, \qquad R(-\Omega) = -\Omega^3 = 1.$$

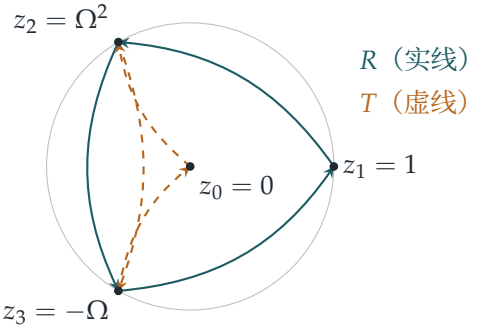
所以 R 保持 z_0 不动，并把 $z_1 \to z_2 \to z_3 \to z_1$。

再看 T：把各点逐一代入，并利用 $\Omega^2 = \Omega - 1$ 化简：

$$\begin{aligned} T(0) &= \frac{\Omega^2}{1} = z_2, \\ T(1) &= \frac{\Omega + \Omega^2}{2\Omega^2 + 1} = \frac{2\Omega - 1}{2\Omega - 1} = 1 = z_1, \\ T(\Omega^2) &= \frac{\Omega^3 + \Omega^2}{2\Omega^4 + 1} = \frac{\Omega - 2}{1 - 2\Omega} = -\Omega = z_3, \\ T(-\Omega) &= \frac{-\Omega^2 + \Omega^2}{-2\Omega^3 + 1} = \frac{0}{3} = 0 = z_0. \end{aligned}$$

在第三行中，$\Omega^3 + \Omega^2 = -1 + (\Omega - 1) = \Omega - 2$，而最后一步成立，是因为 $-\Omega(1 - 2\Omega) = -\Omega + 2\Omega^2 = -\Omega + 2\Omega - 2 = \Omega - 2$。所有分母均不为零（它们分别是 1、$\mathrm{i}\sqrt{3}$、$-\mathrm{i}\sqrt{3}$ 和 3）。

所以 T 保持 z_1 不动，并把 $z_0 \to z_2 \to z_3 \to z_0$。$R$ 和 T 都置换这四个点；两者各是一个 3-循环（cycle）。



这个群的阶至少为 12

设 G 为包含 R 和 T 的最小变换群：即由 R、T 及其逆变换经复合（composition）所能得到的一切变换。G 的每个元素都把集合 $\{z_0, z_1, z_2, z_3\}$ 映射到它自身之上，因为 R 和 T 如此（它们的逆变换亦然，因为那是这个有限集合上的双射（bijection）的逆）。

*三个保持 z_0 不动的映射。*集合 $H = \{I, R, R^2\}$ 包含于 G 之内，其中每个元素都保持 z_0 不动，而且三者是不同的变换（分别是旋转 0°、120°、240°）。

*把 z_0 送到每一个点的映射。*利用上面求得的循环，

$$g_0 = I, \qquad g_1 = R^2T, \qquad g_2 = T, \qquad g_3 = RT$$

满足 $g_k(z_0) = z_k$：例如 $RT(z_0) = R(z_2) = z_3$ 以及 $R^2T(z_0) = R^2(z_2) = R(z_3) = z_1$。

现在考虑十二个乘积 $g_k h$，其中 $k \in \{0,1,2,3\}$ 而 $h \in H$。由于 $h(z_0) = z_0$，我们得到 $g_k h(z_0) = z_k$。

> **想一想** 这十二个乘积当中，会否有两个其实是同一个变换?

不会。若 $g_k h = g_l h'$，把两边同时作用于 z_0：我们得到 $z_k = z_l$，所以 $k = l$。然后在左边复合上 g_k^{-1}，便得 $h = h'$。因此这十二个乘积是 G 中互不相同的元素，于是 $|G| \geq 12$。（用群论的语言来说：z_0 的轨道（orbit）大小为 4，而它的稳定子（stabiliser）大小至少为 3，所以根据轨道－稳定子定理（orbit–stabiliser theorem），$|G| \geq 4 \times 3$。）

最后一部分

有的：这四个点的 24 个置换当中，恰好有一半永远无法产生。

> **想一想** 作为置换，R 和 T 有甚么共通之处?

两者各是一个 3-循环，而 3-循环是偶置换（even permutation）：例如 $(z_1\, z_2\, z_3) = (z_1\, z_3)(z_1\, z_2)$，是两个对换（transposition）的乘积。它们的逆也是 3-循环。偶置换的复合仍是偶置换，所以由 R 和 T 产生的每一个点置换都是偶置换。四件物件只有 12 个偶置换，所以其余 12 个，即奇置换，永远不会产生。例如，把 z_0 和 z_1 对调而保持 z_2 和 z_3 不动，是单独一个对换，因而是奇置换，不可能得到。

事实上，结合上一部分，这就完全确定了 G。R 和 T 都是莫比乌斯变换（Möbius map）（T 有 $ad - bc = \Omega - 2\Omega^4 = 3\Omega \neq 0$），而保持三个点不动的莫比乌斯变换必为恒等变换，所以 G 的每个元素都由它怎样置换这四个点所决定。因此 $|G| \leq 12$，再配合上一部分，$|G| = 12$：G 在这些点上的作用，正是全体偶置换所成的群 A_4。

验算

- 以数值计算，$|\Omega^2 - \Omega + 1| \approx 2 \times 10^{-16}$，而在四个点上计算 R 和 T 的值，所得的正是上述两个 3-循环。
- $R^3 = I$ 显然成立；而 $T^3 = I$ 亦成立，正如 3-循环所应有的性质（已在一个随机点上检验，准确至 10^{-16}）。
- 用电脑生成 R 和 T 的所有复合，恰好得到 12 个不同的映射，全部诱导出偶置换，其中 z_0 被移到全部四个点，并有 3 个映射保持它不动。

常见错误

- 论证说“G 含有阶（order）为 3 的元素，所以 $|G| \geq 12$”。单凭阶为 3 的元素，只能得出 3 整除 $|G|$；因子 4 是来自在四个点上的可迁性（transitivity）。
- 没有化简 Ω 的幂，以致 $T(\Omega^2) = -\Omega$ 看似不成立。应先把一切化为 $a + b\Omega$ 的形式。

STEP 之外

$|G| =$ (轨道大小) $\times$ (稳定子大小) 这个计数结果就是轨道－稳定子定理，而全体偶置换构成交错群（alternating group）A_4，它也是正四面体的旋转群。这里出现这个现象，背后有个很漂亮的原因：莫比乌斯变换保持四个点的交比（cross-ratio）不变，而这四个点的交比是 $e^{-i\pi/3}$，正是那个特殊的“等非调和”（equianharmonic）值，对这个值而言，恰好只有偶置换保持交比不变。关于群和群作用（group action），可参阅 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*；关于莫比乌斯变换和黎曼球面（Riemann sphere），可参阅 Needham 的 *Visual Complex Analysis*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。