详细解答

STEP II 1989，第 7 题

纯数学 · 二阶微分方程

STEP II 1989，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/89-s2-q7

关键思路

$x\,y''$ 与 $-b\,y'$ 这两项放在一起看似棘手，但只要更换自变量（independent variable），设 $t = x^{\alpha}$，y'' 便会产生一个一阶导数项，而这一项可以恰好与 $-b\,y'$ 抵消。适当选取 α 做到这一点之后，余下的就是关于 t 的简谐运动（simple harmonic motion）。此后，当 $x \to 0$ 时的表现，就取决于 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 中的因子 x^{b} 如何变化，而这又取决于 b 的正负。

解答

更换变量

设 $t = x^{\alpha}$，其中 α 待定，并把 y 视为 t 的函数。记 $\dot{y} = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$，由链式法则（chain rule）得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \alpha x^{\alpha-1}\dot{y},$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\dot{y} + \alpha^2 x^{2\alpha-2}\ddot{y},$$

其中第二行用了积法则（product rule）以及 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dot{y} = \alpha x^{\alpha-1}\ddot{y}$。代入后得

$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \alpha^2 x^{2\alpha-1}\ddot{y} + \alpha(\alpha-1-b)\,x^{\alpha-1}\dot{y}.$$

若取 $\alpha = b+1$，$\dot{y}$ 项便会消失；由于 $b > -1$，这个值不等于零。此时 $2\alpha - 1 = 2b+1$，于是方程变成

$$(b+1)^2 x^{2b+1}\ddot{y} + x^{2b+1}y = 0 \quad\Longrightarrow\quad \ddot{y} + \frac{y}{(b+1)^2} = 0,$$

这里两边除以了 $x^{2b+1} \neq 0$（因为 $x > 0$）。这是关于 t 的简谐运动，角频率（angular frequency）为 $1/(b+1)$，所以

$$\boxed{y = A\cos\left(\frac{x^{b+1}}{b+1}\right) + B\sin\left(\frac{x^{b+1}}{b+1}\right)}$$

其中 A、B 为任意常数。二阶方程配上两个任意常数：这就是通解（general solution）。

当 $x \to 0$ 时的表现

记 $u = x^{b+1}/(b+1)$。由于 $b+1 > 0$，当 $x \to 0^+$ 时 $u \to 0^+$，所以

$$y \to A\cos 0 + B\sin 0 = A.$$

因此 $y \to 1$ 迫使 $A = 1$。利用 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = x^b$ 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^b(-\sin u + B\cos u) \qquad (A = 1).$$

情况 $b > 0$。此时 $x^b \to 0$，而括号内的式子趋向 B，是一个有限值。所以无论 B 取甚么值，都有 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x \to 0$。以下这族函数

$$y = \cos\left(\frac{x^{b+1}}{b+1}\right) + B\sin\left(\frac{x^{b+1}}{b+1}\right), \qquad B \in \mathbb{R},$$

中的每一个都满足两个条件。解是存在的，但并不唯一，正如题目所要求证明的。

> **想一想** 对于一般的二阶方程，给定 y 的一个值和 y' 的一个值，就能确定解。为甚么在这里却行不通？

唯一性定理（uniqueness theorem）要求方程可写成 $y'' = f(x, y, y')$ 的形式，而且 f 的性质要够好。两边除以 x 得 $y'' = (b/x)\,y' - x^{2b}y$，而系数 b/x 在 $x = 0$ 处趋向无穷。$x = 0$ 这一点是奇点（singular），所以通常的保证在该处并不适用。

情况 $b = 0$。此时 $x^b = 1$，而 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x \to B$。条件迫使 $B = 0$，得出唯一解 $y = \cos x$。（这其实就是 $y'' + y = 0$。）

情况 $-1 < b < 0$。此时 $x^b \to \infty$。若 $B \neq 0$，则 $Bx^b\cos u \to \pm\infty$，而另一项很小：由于 $\sin u \leq u$，

$$|x^b \sin u| \leq x^b \cdot \frac{x^{b+1}}{b+1} = \frac{x^{2b+1}}{b+1}.$$

更准确地说，$\sin u/u \to 1$，所以 $x^b \sin u \sim x^{2b+1}/(b+1)$。因此必须有 $B = 0$，这时

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -x^b \sin u \sim -\frac{x^{2b+1}}{b+1}.$$

这个式子趋向 0，当且仅当 $2b+1>0$，即 $b>-\frac{1}{2}$。当 $b=-\frac{1}{2}$ 时它趋向 -2，而当 $b<-\frac{1}{2}$ 时它无界。所以当 $-\frac{1}{2}<b<0$ 时恰好有一个解 $y=\cos(x^{b+1}/(b+1))$，而当 $-1<b\le-\frac{1}{2}$ 时则没有解。

结论

这些条件能确定唯一解，恰好是在

$$-\tfrac{1}{2}<b\le 0,$$

的时候，而该解为 $y=\cos(x^{b+1}/(b+1))$。



验算

- $b=0$ 时方程为 $y''+y=0$，其解 $A\cos x+B\sin x$ 与公式吻合。
- 数值上，通解在舍入误差范围内满足方程（在随机选取的 x, b, A, B 处用有限差分检验）。取 $b=-\frac{1}{4}, B=0$，我们在 $x=10^{-9}$ 处得到 $y'\approx -4.2\times10^{-5}$，趋向 0。取 $b=-\frac{1}{2}$ 时，该值保持在 -2；而取 $b=1, B=5$ 时，在 $x=10^{-9}$ 处的值为 5×10^{-9}。

常见错误

- 做到“$b\le0$ 时解唯一”就停下来：当 $-1<b\le-\frac{1}{2}$ 时，即使是余弦解也有 $y'\not\to 0$，所以根本没有解。
- 把 $\alpha x^{\alpha-1}\dot{y}$ 对 x 求导时忘记用积法则。多出来的那一项正是用来抵消 $-by'$ 的。

STEP 之外

$x=0$ 这一点是这个方程的正则奇点（regular singular point）。在这类点附近，弗罗贝尼乌斯法（Frobenius method）会寻找形如 $x^r\sum c_nx^n$ 的解，而这里的指标方程（indicial equation）的根为 $r=0$ 和 $r=b+1$。在奇点处哪些条件能确定一个解，取决于这些指数，正如我们刚才所见。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入门教材）涵盖了级数解和正则奇点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。