详细解答

STEP II 1989，第 6 题

纯数学 · 反函数的积分

STEP II 1989，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/89-s2-q6

关键思路

右边有一个 g 对 y 的积分，所以最自然的做法是把左边的积分改写成以 $y = \mathrm{f}(x)$ 表示，即作代换（substitution）$x = \mathrm{g}(y)$。新的被积函数（integrand）含有 $y\,\mathrm{g}'(y)$，一看便知要用分部积分法（integration by parts），而边界项正好给出那两个长方形。第二条公式的做法完全一样，只是把 x 换成 $x^2/2$，把面积换成绕 y 轴的旋转体体积（volume of revolution）。

解答

第一条公式

由于在 $[a, b]$ 上 $\mathrm{f}'(x) > 0$，f 在该区间上严格递增（strictly increasing），所以它是由 $[a, b]$ 到 $[\alpha, \beta]$ 的双射（bijection），反函数（inverse function）$\mathrm{g}\colon [\alpha, \beta] \to [a, b]$ 存在。此外 g 可微（differentiable），且

$$\mathrm{g}'(y) = \frac{1}{\mathrm{f}'(\mathrm{g}(y))},$$

这个式子有意义，因为 f' 永不为零。

代入 $x = \mathrm{g}(y)$，于是 $\mathrm{f}(x) = y$，$\mathrm{d}x = \mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y$。当 $x = a$ 时，$y = \mathrm{f}(a) = \alpha$；当 $x = b$ 时，$y = \beta$。因此

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta y\,\mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y.$$

现在用分部积分法，取 $u = y$ 和 $\mathrm{d}v = \mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y$，所以 $v = \mathrm{g}(y)$：

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta y\,\mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y &= \Big[y\,\mathrm{g}(y)\Big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \mathrm{g}(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \beta\,\mathrm{g}(\beta) - \alpha\,\mathrm{g}(\alpha) - \int_\alpha^\beta \mathrm{g}(y)\,\mathrm{d}y \\ &= b\beta - a\alpha - \int_\alpha^\beta \mathrm{g}(y)\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

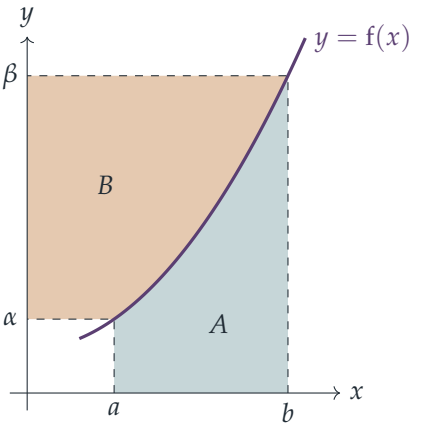
因为 $\mathrm{g}(\beta) = b$ 及 $\mathrm{g}(\alpha) = a$。这就是所求的公式。

几何意义

取 $a > 0$ 及 $\alpha > 0$。由于 f 递增，$0 < a < b$ 且 $0 < \alpha < \beta$，所以曲线 $y = \mathrm{f}(x)$ 由 (a, α) 到 (b, β) 的一段弧位于第一象限（first quadrant）。把公式写成

$$\underbrace{\int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{面积}A} + \underbrace{\int_\alpha^\beta \mathrm{g}(y)\,\mathrm{d}y}_{\text{面积}B} = b\beta - a\alpha.$$

这里 A 是 $a \le x \le b$ 时曲线与 x 轴之间的面积，B 是 $\alpha \le y \le \beta$ 时曲线与 y 轴之间的面积（把图形横过来看，曲线就是 $x = \mathrm{g}(y)$）。两者合起来，恰好填满长方形 $[0, b] \times [0, \beta]$ 除去较小的长方形 $[0, a] \times [0, \alpha]$ 后余下的部分，而这个 L 形区域的面积是 $b\beta - a\alpha$。



第二条公式

用同一个代换 $x = \mathrm{g}(y)$，$\mathrm{d}x = \mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y$：

$$2\pi \int_a^b x\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_\alpha^\beta y\,\mathrm{g}(y)\,\mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y.$$

想一想 这一次应该对哪一个因子积分?

留意根据链式法则（chain rule），$\mathrm{g}(y)\,\mathrm{g}'(y)$ 是 $\frac{1}{2}[\mathrm{g}(y)]^2$ 的导数。所以取 $u = y$ 和 $v = \frac{1}{2}[\mathrm{g}(y)]^2$ 作分部积分：

$$\begin{aligned} 2\pi \int_\alpha^\beta y\,\mathrm{g}(y)\,\mathrm{g}'(y)\,\mathrm{d}y &= 2\pi \left(\left[\tfrac{1}{2} y\,[\mathrm{g}(y)]^2\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \tfrac{1}{2}[\mathrm{g}(y)]^2\,\mathrm{d}y \right) \\ &= \pi(\beta b^2 - \alpha a^2) - \pi \int_\alpha^\beta [\mathrm{g}(y)]^2\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

这里同样用到 $\mathrm{g}(\beta) = b$ 及 $\mathrm{g}(\alpha) = a$。这就是第二条公式。

第二条公式的几何意义

同样取 $a > 0$、$\alpha > 0$，把上图绕 y 轴旋转一整周。

- 区域 A 扫出一个立体，用圆柱壳法（method of cylindrical shells）计算，其体积为 $2\pi \int_a^b x\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$：与旋转轴相距 x、高 $\mathrm{f}(x)$、阔 $\mathrm{d}x$ 的窄条，旋转后成为一个体积约为 $2\pi x\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ 的圆柱壳。
- 区域 B 扫出一个立体，用圆盘法（discs）计算，其体积为 $\pi \int_\alpha^\beta [\mathrm{g}(y)]^2\,\mathrm{d}y$：位于高度 y 的窄条，旋转后成为一个半径为 $\mathrm{g}(y)$ 的圆盘。
- 两个立体合起来，恰好填满一个半径为 b、高为 β 的圆柱体，再从其底部挖去一个半径为 a、高为 α 的同轴圆柱体，其体积为 $\pi b^2\beta - \pi a^2\alpha$。

所以这条公式是说：圆柱壳体积加圆盘体积，等于两个圆柱体的体积之差。条件 $a > 0$ 和 $\alpha > 0$ 确保两个区域都在旋转轴的同一侧，并且在 x 轴上方，这样两个积分才真正是体积，而两个立体也不会重叠。

验算

试取 $[1,2]$ 上的 $\mathrm{f}(x) = x^2$，于是 $\alpha = 1$，$\beta = 4$，$\mathrm{g}(y) = \sqrt{y}$。第一条公式左边是 $\frac{7}{3}$，右边是 $8 - 1 - \frac{2}{3}(8-1) = \frac{7}{3}$。第二条公式左边是 $2\pi \cdot \frac{15}{4} = \frac{15\pi}{2}$，右边是 $\pi(16-1) - \pi \cdot \frac{15}{2} = \frac{15\pi}{2}$。我们亦用辛普森法则（Simpson's rule）对两条公式作了数值验算，其中 g 以二分法（bisection）求得；所验算的几个函数包括 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上的 $x^3 + x$，这时第一条公式两边都等于 5.859375。

常见错误

- 忘记更改积分上下限：代入 $x = \mathrm{g}(y)$ 之后，上下限变成 α 和 β，而不是 a 和 b。

- 没有说明 g 为何存在和可微。条件 $f' > 0$ 正是为此而设。
- 把区域 B 说成位于曲线之下。其实它位于曲线与 y 轴之间。

STEP 之外

f 与 f^{-1} 的图像互为关于 $y = x$ 的反射，而第一条公式正是这个事实的积分版本。它是杨氏不等式（Young's inequality）背后的想法：若 f 递增、$f(0) = 0$ 且 $a, b \geq 0$，则 $ab \leq \int_0^a f + \int_0^b f^{-1}$；凸分析（convex analysis）和哈密顿力学（Hamiltonian mechanics）中所用的勒让德变换（Legendre transform），背后也是同一个想法。arcsin 和 ln 等反函数的积分，同样可以靠它求出，无需任何巧妙的代换。想看代换与反函数的严谨处理，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本实分析入门书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。