详细解答

STEP II 1989，第 5 题

纯数学 · 极坐标曲线与反射

STEP II 1989，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/89-s2-q5

关键思路

第 (i) 部分只不过是把 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 代入 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = (\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta)/(\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta)$。至于镜面，以 O 为中心的极坐标（polar coordinates）是最自然的选择，因为反射光线总是沿着半径回到极点（pole）。这样，反射定律（law of reflection）就能单凭 θ 告诉我们每一点上法线（normal）的方向，而第 (i) 部分则把这一点化为关于 $r(\theta)$ 的一阶微分方程（differential equation），而且这个方程可以分离变量。

解答

第 (i) 部分

极坐标为 (r,θ) 的点，其笛卡儿坐标（Cartesian coordinates）为 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$。沿着曲线 $r = r(\theta)$，两者都是 θ 的函数，由积法则（product rule）得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta - r\sin\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta.$$

由链式法则（chain rule，用于以参数表示的曲线），凡 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta \neq 0$ 之处，

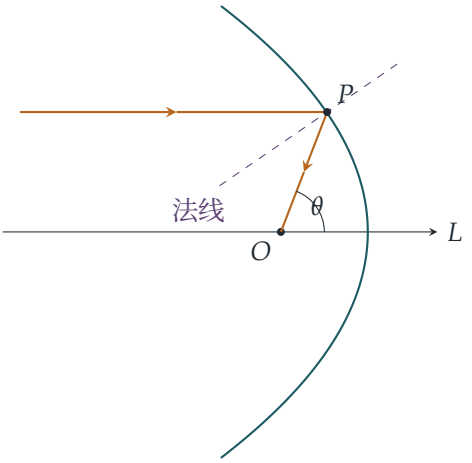
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta}{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta - r\sin\theta} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\tan\theta + r}{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} - r\tan\theta},$$

其中最后一步把分子和分母同时除以 $\cos\theta$，只要 $\cos\theta \neq 0$ 便可以这样做。这就是所求的公式。

第 (ii) 部分

化为平面曲线问题。任取一个包含 L 的平面 Π，并在 Π 内取镜面上的一点 P。经过 P 且平行于 L 的光线位于 Π 内，O 亦然；因此反射光线 PO 也位于 Π 内。P 处的法线平分 Π 内两条直线的夹角，所以它也位于 Π 内。设镜面与 Π 相交所得的曲线为 C；它在 P 处的切线（tangent）既在 Π 内，又在镜面的切平面（tangent plane）内，所以与法线垂直。于是，在平面 Π 内，C 在 P 处的法线平分入射光线与反射光线的夹角：问题化为一个二维问题。

坐标。在 Π 内采用极坐标，以 O 为极点，始线（initial line）沿着 L，并选定方向使入射光线沿 $\theta = 0$ 的方向前进（如图所示，光线来自 L 上镜面开口以外的那一侧）。设 $P = (r, \theta)$ 在 C 上。



法线的方向。从 P 出发，入射光线沿方向 $(-1, 0)$ 往回走，而反射光线沿方向 $(-\cos\theta, -\sin\theta)$ 射向 O。两者都是单位向量（unit vector），所以它们的和指向两者夹角的平分线（bisector）方向，亦即法线方向：

$$(-1-\cos\theta, -\sin\theta) = -2\cos\tfrac{\theta}{2}\,(\cos\tfrac{\theta}{2}, \sin\tfrac{\theta}{2}),$$

这里用了 $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ 和 $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$。所以 P 处的法线与 L 成 $\frac{\theta}{2}$ 角，切线与法线垂直，而 C 在 P 处的斜率（gradient）为

$$m = -\cot\tfrac{\theta}{2}.$$

微分方程。记 $r' = \mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$，$t = \tan\theta$ 及 $\tau = \tan\frac{\theta}{2}$，于是 $t = \dfrac{2\tau}{1-\tau^2}$ 而 $m = -\dfrac{1}{\tau}$。由第 (i) 部分，

$$\frac{r't + r}{r' - rt} = m \quad\Longrightarrow\quad r'(t-m) = -r(1+mt) \quad\Longrightarrow\quad \frac{r'}{r} = -\frac{1+mt}{t-m}.$$

现在

$$1+mt = 1-\frac{2}{1-\tau^2} = -\frac{1+\tau^2}{1-\tau^2}, \qquad t-m = \frac{2\tau}{1-\tau^2}+\frac{1}{\tau} = \frac{1+\tau^2}{\tau(1-\tau^2)},$$

因此

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \tan\tfrac{\theta}{2}.$$

? **想一想** 第 (i) 部分在 $\cos\theta = 0$ 之处失效。这会否留下漏洞?

不会。方程 $r'/r = \tan\frac{\theta}{2}$ 只涉及 θ 在 $-\pi < \theta < \pi$ 上的连续函数。除了孤立的值 $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$（以及切线垂直的任何孤立点）可能例外，它在每一点都成立，所以由 r' 的连续性，它在这些点上同样成立。（另一个做法是：半径与切线之间的夹角 ψ 满足 $\tan\psi = r/r'$，而由几何关系可直接得出 $\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$，并无任何例外点。）

求解。两边积分，并注意当 $-\pi < \theta < \pi$ 时 $\cos\frac{\theta}{2} > 0$,

$$\ln r = \int \tan\tfrac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = -2\ln\cos\tfrac{\theta}{2} + \text{常数}, \qquad \text{所以} \qquad r = \frac{k}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2k}{1+\cos\theta}$$

其中 $k > 0$ 为常数（因为 $r > 0$）。令 $\ell = 2k$。于是 $r + r\cos\theta = \ell$，即 $r = \ell - x$。两边平方，并利用 $r^2 = x^2 + y^2$,

$$x^2 + y^2 = (\ell - x)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad y^2 = \ell^2 - 2\ell x.$$

这是一条以 L 为轴、以 O 为焦点（focus）的抛物线（parabola）（它就是 $Y^2 = 4aX$，其中 $X = \frac{\ell}{2} - x, a = \frac{\ell}{2}$，所以焦点位于 $x = \frac{\ell}{2} - a = 0$）。由于 Π 是任意一个包含 L 的平面，镜面与每个这样的平面都相交于一条抛物线，正如所求。（事实上，只有当镜面是单一个旋转抛物面（paraboloid of revolution）时，常数 ℓ 才会在每个平面内都相同；本题并不需要这一点。）

验算

- 当 $\theta = 0$ 时得 $r = \frac{\ell}{2}$：顶点位于 O 与准线（directrix）$x = \ell$ 的正中间，这正是以 O 为焦点的抛物线应有的性质。
- 当 $\ell = 2$ 而 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，该点为 $P = (0,2)$，$y^2 = 4 - 4x$ 在该处的斜率为 $-1 = -\cot\frac{\pi}{4}$，而把方向 $(1,0)$ 对这条切线作反射便得 $(0,-1)$，笔直向下射到 O。
- 数值验证：第 (i) 部分的斜率公式在 2000 条随机曲线上与有限差分（finite differences）的结果吻合（准确至 10^{-8}）；以龙格—库塔法（Runge–Kutta）求解 $r' = r\tan\frac{\theta}{2}$，由 $r(0) = 1.35$ 出发，得 $r(2.5) = 13.5776380$，与 $2.7/(1+\cos 2.5)$ 相符；又在 1000 个随机点上，把平行于 L 的光线经 $y^2 = \ell^2 - 2\ell x$ 反射后，光线都通过 O。

常见错误

- 取错了角平分线：沿两条光线背离 P 方向的两个单位向量，其和给出法线；其差则给出切线。
- 忘记解释为何问题是平面问题：经过 L 的平面包含入射光线和 O，因而也包含反射光线和法线。
- 写成 $\ln r = -2\ln\cos\frac{\theta}{2}$ 而漏掉常数，这样便失去了整族抛物线。

STEP 之外

方程 $r(1+\cos\theta) = \ell$ 是圆锥曲线（conic）的极坐标形式，其焦点位于极点，离心率（eccentricity）为 1；把 1 换成 e 便得到椭圆和双曲线，而在极坐标下求解牛顿（Newton）方程时，行星轨道正是以这种形式出现的。这个反射论证也正是卫星碟形天线和汽车车头灯采用抛物面的原因。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）就是以这种方法推导出圆锥曲线轨道的。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。