详细解答

STEP II 1989，第 4 题

纯数学 · 有理函数的描绘

> **STEP II 1989，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q4

关键思路

由线性因式相乘或相除而成的式子，最容易用取对数求导（logarithmic differentiation）的方法处理，因为对数会把它变成一个和。至于值域（range），不妨把问题倒过来问：对哪些 z，$\mathrm{f}(x) = z$ 有实数解？这条方程是 x 的二次方程（quadratic），所以答案来自判别式（discriminant）。之后的草图，就由零点（zeros）、极点（poles）、$|x|$ 很大时的表现，以及是否有某些 z 值取不到来决定。

关于印出来的题目，要说明一点。条件 $a + d \neq c + d$ 只是说 $a \neq c$，这是我们早已知道的。实际用到的条件是 $a + b \neq c + d$，以下我们一直假设这个条件成立。

解答

导数

在 $\mathrm{f}(x) \neq 0$ 的地方，即 $x \neq a, b$（以及 $x \neq c, d$）时，我们可以对绝对值取对数（logarithms of moduli）：

$$\ln|\mathrm{f}(x)| = \ln|x-a| + \ln|x-b| - \ln|x-c| - \ln|x-d|.$$

求导，并利用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x-k| = \frac{1}{x-k}$，得

$$\frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-c} - \frac{1}{x-d}.$$

现在乘以 x。当 $x \neq 0$ 时，每一项变成

$$\frac{x}{x-k} = \frac{1}{1-k/x} = \left(1 - \frac{k}{x}\right)^{-1},$$

于是得到所求的恒等式

$$\frac{x\,\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)} = \left(1-\frac{a}{x}\right)^{-1} + \left(1-\frac{b}{x}\right)^{-1} - \left(1-\frac{c}{x}\right)^{-1} - \left(1-\frac{d}{x}\right)^{-1}.$$

$|x|$ 很大时

当 $|x|$ 远大于 $|k|$ 时，由二项式展开（binomial expansion）得 $(1-k/x)^{-1} = 1 + \frac{k}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$。四个首项 1 互相抵消（$1+1-1-1=0$），余下

$$\frac{x\,\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)} = \frac{a+b-c-d}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \qquad \text{所以} \qquad \mathrm{f}'(x) = \frac{\mathrm{f}(x)}{x^2}\left[(a+b-c-d) + O\left(\tfrac{1}{x}\right)\right].$$

由于 $a+b-c-d \neq 0$，只要 $|x|$ 足够大，方括号内的式子便与 $a+b-c-d$ 同号。另外，当 $|x| \to \infty$ 时 $\mathrm{f}(x) \to 1$，所以在那里 $\mathrm{f}(x) > 0$，而且 $x^2 > 0$。因此，当 $|x|$ 很大时，在实数线的两端，$\mathrm{f}'(x)$ 都与 $a+b-c-d$ 同号。

曲线位于渐近线（asymptote）$y=1$ 的哪一侧，也值得记下来。直接计算，

$$\mathrm{f}(x) - 1 = \frac{(c+d-a-b)x + ab - cd}{(x-c)(x-d)} \approx \frac{c+d-a-b}{x} \quad \text{对于很大的} |x|,$$

而由分子可见，$\mathrm{f}(x) = 1$ 恰好只在一点成立，即 $x_0 = \dfrac{cd-ab}{c+d-a-b}$。

值域的条件：一个方法

把 $\mathrm{f}(x) = z$ 改写成 $(x-a)(x-b) = z(x-c)(x-d)$，这就是二次方程

$$(1-z)x^2 - (a+b-(c+d)z)x + (ab - cdz) = 0.$$

- 这条方程的根不可能是 $x=c$ 或 $x=d$，因为左边的 $(x-a)(x-b)$ 在那里不等于零。所以二次方程的实根恰好就是 $\mathrm{f}(x) = z$ 的实数解。
- 当 $z \neq 1$ 时，方程有实根，当且仅当判别式 $\Delta(z) = \big(a+b-(c+d)z\big)^2 - 4(1-z)(ab-cdz)$ 满足 ≥ 0。把它展开，乘以 $(c-d)^2 > 0$，再按 z 的幂次整理。设 $P = (a-c)(b-d)$ 和 $Q = (a-d)(b-c)$，有用的恒等式是 $P - Q = (a-b)(c-d)$，所以常数项 $(a-b)^2(c-d)^2$ 等于 $(P+Q)^2 - 4PQ$。于是题目给出的不等式正好就是 $(c-d)^2\Delta(z) \geq 0$。
- 当 $z=1$ 时，方程是线性的，x 的系数为 $c+d-a-b \neq 0$，所以有一个根；而不等式亦成立，因为两边相差 $(c-d)^2(a+b-c-d)^2 > 0$。

草图

记 $G(z) = \left[(c-d)^2 z + P + Q\right]^2 - 4PQ$。当 z 变化时，平方项取遍 $[0, \infty)$ 内的每一个值，所以 G 的最小值是 $-4PQ$。因此：

$$\text{函数f 的值域是整个}\mathbb{R} \iff PQ \leq 0.$$

若 $PQ > 0$，则使 $G(z) < 0$ 的 z 值构成一个开区间，这些就是取不到的值。

> **想一想** 没有实际的数值，我们怎样知道 PQ 的正负？

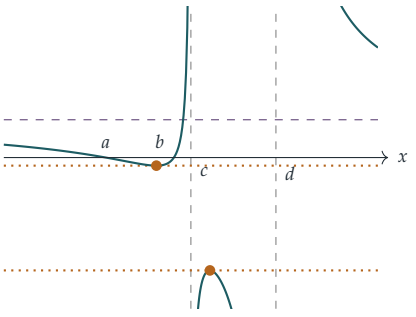
重新组合：$PQ = (a-c)(a-d) \cdot (b-c)(b-d)$。由于 $a < c < d$，第一对是两个负数的积，所以是正数。于是 PQ 与 $(b-c)(b-d)$ 同号，而后者为负，恰好就是 b 位于两个极点 c 与 d 之间的时候。一切都取决于 b 相对于 $c < d$ 的位置，以及 $a + b - c - d$ 的正负：

1. $a < b < c < d$：这时 $a + b < c + d$ 自动成立。
2. $a < c < b < d$：同样有 $a + b < c + d$，因为 $a < c$ 而且 $b < d$。
3. $a < c < d < b$，并且 $a + b < c + d$。
4. $a < c < d < b$，并且 $a + b > c + d$。

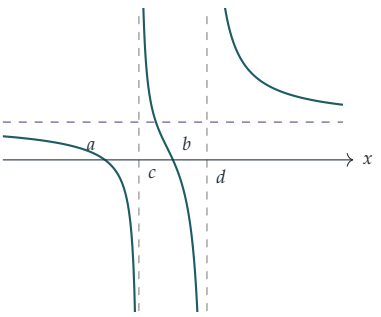
所以只有在情况 2，值域才是整个 $\mathbb{R}$。在情况 1、3 和 4，都有一个区间的值取不到。

还有一件工具，对找出转向点（turning points）很有帮助。若 f 在 x_1 有驻点（stationary point），而 $\mathrm{f}(x_1) = z_1$，则 x_1 是 $(x-a)(x-b) - z_1(x-c)(x-d) = 0$ 的重根（repeated root）。（当 $z_1 = 1$ 时这是线性方程，所以不可能发生。）有重根即是 $G(z_1) = 0$。所以驻点处的函数值恰好就是取不到的区间的两个端点。在情况 2，$G > 0$ 恒成立，所以完全没有驻点。

f 在每个极点两侧附近的正负，可以靠数一数负因式的个数得出。在每幅图中，垂直虚线是极点 $x = c$、$x = d$，水平虚线是渐近线 $y = 1$，琥珀色的点线标出取不到的区间的两个端点，也就是驻点（琥珀色圆点）处的函数值。各曲线是按特定数值（列于每幅图下方）绘画的，但在同一情况下，无论怎样选取数值，形状都是一样的。



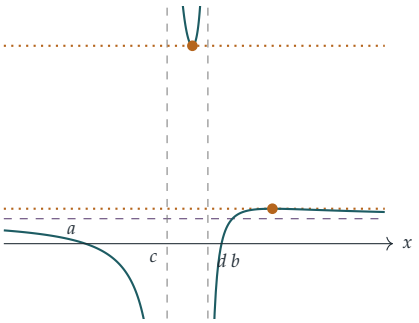
情况 1：$a, b, c, d = -2, 0, \frac{1}{2}, 3$



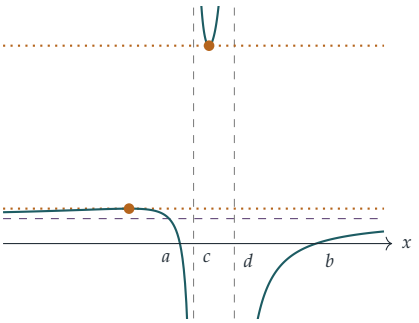
情况 2：$a, b, c, d = -1, 1, 0, 2$

情况 1（$a < b < c < d$）。这里在左边远处 $\mathrm{f} < 1$，在右边远处 $\mathrm{f} > 1$。在 $x < c$ 上，曲线由略低于 1 的位置进来，在 a 处降至 0，在 a 与 b 之间下探至一个负的极小值，然后上升穿过 b，在 c 处趋向 $+\infty$。在两个极点之间，分母的两个因式异号，而分子为正，所以在两端都有 $\mathrm{f} \to -\infty$，中间有一个负的局部极大值（local maximum）。在 d 的右边，曲线由 $+\infty$ 下降至 1。(c, d) 上的局部极大值低于 (a, b) 上的局部极小值（local minimum），严格介乎两者之间的值都取不到。值域不是整个 $\mathbb{R}$。

情况 2（$a < c < b < d$）。这里没有驻点。曲线由略低于 1 的位置下降，穿过 a，在 c 处趋向 $-\infty$；然后由 $+\infty$ 穿过 b，在 d 处趋向 $-\infty$；再由 $+\infty$ 下降至 1。单是中间的一支已经取遍所有实数值。值域是整个 $\mathbb{R}$。



情况 3：$a, b, c, d = -3, 2, 0, \frac{3}{2}$



情况 4：$a, b, c, d = -\frac{1}{2}, \frac{9}{2}, 0, \frac{3}{2}$

情况 3（$a < c < d < b$，$a + b < c + d$）。在 $x < c$ 上，曲线由略低于 1 的位置下降，穿过 a，趋向 $-\infty$。在两个极点之间，分子为负，所以在两端都有 $\mathrm{f} \to +\infty$，中间有一个局部极小值 m。在 d 的右边，曲线由 $-\infty$ 上升穿过 b，在 x_0 处穿过 $y = 1$，到达略高于 1 的局部极大值 M，然后从上方回落至 1。(M, m) 内的值都取不到，其中 $1 < M < m$。值域不是整个 $\mathbb{R}$。

情况 4（$a < c < d < b$，$a + b > c + d$）。这是把情况 3 的外侧表现对调。在左边远处，f 略高于 1 并且递增。它到达局部极大值 $M > 1$，在 $x_0 < a$ 处穿过 $y = 1$，再下降穿过 a，在 c 处趋向 $-\infty$。中间的一支与之前一样呈 U 形，极小值为 m。在 d 的右边，曲线由 $-\infty$ 上升穿过 b，从下方趋向 1。(M, m) 同样取不到。值域不是整个 $\mathbb{R}$。

验算

- 恒等式：随机选取 a, b, c, d, x，用有限差分（finite difference）估算 $x\mathrm{f}'(x)/\mathrm{f}(x)$，结果与右边相符，误差约为 10^{-9}。

- 情况 1，取 $a,b,c,d=-2,0,\frac{1}{2},3$：这里 $P=\frac{15}{2}$，$Q=\frac{5}{2}$，$(c-d)^2=\frac{25}{4}$，而 $G(z)=0$ 给出 $z=-\frac{8}{5}\pm\frac{4}{5}\sqrt{3}$，约为 -0.2144 和 -2.9856。这正好就是解 $\mathrm{f}'(x)=0$ 所得的驻点处的函数值（在 $x\approx-0.515$ 和 $x\approx1.060$）。在 4×10^5 个点上对 f 取样，没有一个值严格落在两者之间。
- 情况 3 和 4（图中所用的数值）：取不到的区间是 $(1.4007, 7.9327)$，同样与驻点处的函数值吻合。在情况 2，$\mathrm{f}'(x)=0$ 没有实数解。

常见错误

- 忘记了 $\mathrm{f}(x)=z$ 只在 $z\neq1$ 时才是二次方程：$z=1$ 这个值需要另外交代一句。
- 以为曲线在两端都从同一侧趋近 $y=1$。事实并非如此：$\mathrm{f}-1\approx(c+d-a-b)/x$ 的正负随 x 而改变。

STEP 之外

把“f 的值域是甚么?”变成“对哪些 z，$\mathrm{f}(x)=z$ 有解?”，就是原像（preimage）的想法；而观察到驻点处的函数值正是两个解合而为一的地方，则是临界值（critical values）理论的起点。像这样的 2 次有理函数（rational function）是一个二对一的映射，它在复数上的表现要简洁得多：在复数上，每个值（按重数（multiplicity）计算）都恰好取到两次。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 把这种几何观点发挥得十分精彩。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。