详细解答

STEP II 1989，第 3 题

纯数学 · 复双曲函数映射

> **STEP II 1989，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q3

关键思路

右边是 $2\sinh(x+\mathrm{i}y)$，所以整道题目其实是在研究映射（map）$u+\mathrm{i}v=\sinh(x+\mathrm{i}y)$。把和的 sinh 展开，便可分成实部（real part）和虚部（imaginary part），从而明确写出 u 和 v。固定 x 或 y 之后，剩下的是一条参数曲线（parametric curve），再利用恒等式 $\cos^2+\sin^2=1$ 和 $\cosh^2-\sinh^2=1$ 便可消去参数。

解答

求 u 和 v

两边除以 2，得 $u+\mathrm{i}v=\sinh(x+\mathrm{i}y)$。利用 $\sinh(\mathrm{i}y)=\mathrm{i}\sin y$ 和 $\cosh(\mathrm{i}y)=\cos y$，

$$\begin{aligned}\sinh(x+\mathrm{i}y)&=\sinh x\cosh(\mathrm{i}y)+\cosh x\sinh(\mathrm{i}y)\\&=\sinh x\cos y+\mathrm{i}\cosh x\sin y.\end{aligned}$$

（如果你喜欢，也可以直接展开 $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)-\mathrm{e}^{-x}(\cos y-\mathrm{i}\sin y))$；结果完全一样。）由于 x、y、u、v 全是实数，比较实部和虚部可得

$$u=\sinh x\cos y,\qquad v=\cosh x\sin y.$$

直线 $x=a$

固定 $x=a$ 而让 y 任意变化，则 $u=\sinh a\cos y$，$v=\cosh a\sin y$。由于 $a>0$，$\sinh a$ 和 $\cosh a$ 都是正数，所以可以相除：

$$\left(\frac{u}{\sinh a}\right)^2+\left(\frac{v}{\cosh a}\right)^2=\cos^2 y+\sin^2 y=1.$$

反过来，这个椭圆（ellipse）上的每一点都可以写成 $(\sinh a\cos y, \cosh a\sin y)$ 的形式（对某个 y），因为这正是椭圆的标准参数表示（parametrisation）。所以直线 $x = a$ 对应整个椭圆（y 每走过一个长度为 2π 的区间，椭圆便被描画一次），其半轴（semi-axes）沿 u 轴方向为 $\sinh a$，沿 v 轴方向为 $\cosh a$。

直线 $y = b$

现在固定 $y = b$ 而让 x 任意变化：$u = \sinh x\cos b$, $v = \cosh x\sin b$。题目给出 $0 < \sin b < 1$，所以 $\sin b \neq 0$，而且 $\cos^2 b = 1 - \sin^2 b > 0$，所以 $\cos b \neq 0$ 亦成立。相除后得

$$\left(\frac{v}{\sin b}\right)^2 - \left(\frac{u}{\cos b}\right)^2 = \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

这是一条双曲线（hyperbola），其轴沿 v 轴，顶点（vertices）位于 $(0, \pm\sin b)$。

> **想一想** 为甚么只有一支？这一支又是否全部都被覆盖？

由于 $\cosh x > 0$ 且 $\sin b > 0$，必有 $v > 0$：只能到达上面的一支。而且这一支上的每一点都能到达：任取上支上的一点 (u, v)，选 $x = \sinh^{-1}(u/\cos b)$，使得 $\sinh x\cos b = u$；这时 $\cosh x\sin b$ 就是双曲线方程对于这个 u 的正根，亦即 v。所以直线 $y = b$ 恰好对应其中一支，即 $v > 0$ 的那一支。

交点与直角

点 $x = a$、$y = b$ 同时在两条直线上，所以它的像（image）同时在两条曲线上：

$$(u, v) = (\sinh a\cos b,\ \cosh a\sin b).$$

要找出两条曲线在该点的方向，可把每个参数表示对各自的参数求导（differentiate）。沿椭圆（$x = a$，参数为 y），在 $y = b$ 处：

$$\mathbf{t}_1 = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\right) = (-\sinh a\sin b,\ \cosh a\cos b).$$

沿双曲线（$y = b$，参数为 x），在 $x = a$ 处：

$$\mathbf{t}_2 = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) = (\cosh a\cos b,\ \sinh a\sin b).$$

两个向量都不是零向量，因为它们各有一个分量是 $\cosh a\cos b \neq 0$，所以两者都是真正的切向量（tangent vectors）。它们的纯量积（scalar product）是

$$\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2 = -\sinh a\sin b\cosh a\cos b + \cosh a\cos b\sinh a\sin b = 0,$$

所以椭圆与双曲线的这一支在该点正交，正如题目所求。

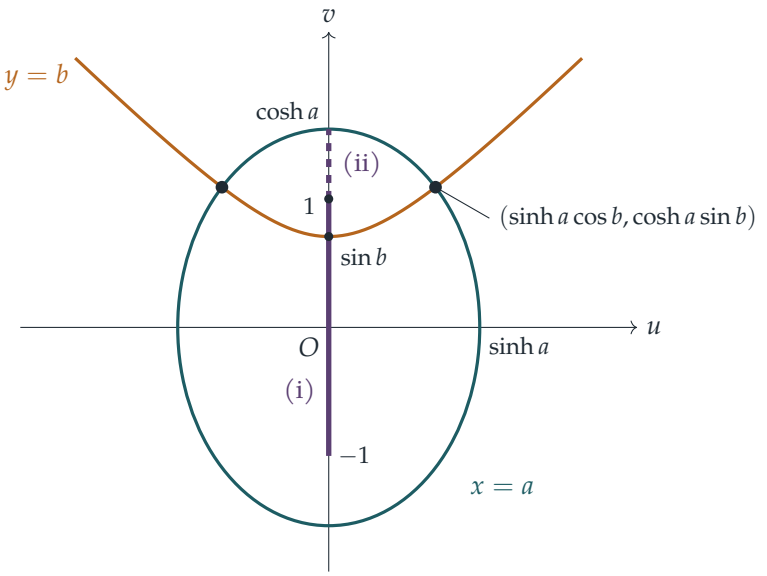
（由于两条曲线都具有 $u \mapsto -u$ 的对称性，它们在 $(-\sinh a\cos b, \cosh a\sin b)$ 亦正交；这一点是 $x = -a$、$y = b$ 的像，也同样是 $x = a$、$y = \pi - b$ 的像。）

略图

(i) $x = 0$ 给出 $u = 0$，$v = \sin y$：即 v 轴上由 $(0, -1)$ 至 $(0, 1)$ 的线段。留意它是椭圆在 $a \to 0$ 时的极限，因为 $\sinh a \to 0$ 而 $\cosh a \to 1$。

(ii) $y = \frac{1}{2}\pi$，$0 \le x \le a$ 给出 $u = 0$，$v = \cosh x$，其值由 1 递增至 $\cosh a$：即 v 轴上由 $(0, 1)$ 向上至椭圆顶端 $(0, \cosh a)$ 的线段。

双曲线这一支的顶点在 $(0, \sin b)$，位于线段 (i) 上。略图中取 $a = 1$，$b = \frac{1}{4}\pi$。



线段 (i) 以实线表示，线段 (ii) 以虚线表示；两者合起来沿 v 轴由 -1 一直向上伸延至椭圆顶端。假如改为取 $y = \frac{1}{2}\pi$ 而让 x 取遍所有实数，便会得到 v 轴上的射线 $v \ge 1$，而且重复覆盖两次；这就是题目排除了的退化情况 $\sin b = 1$。

验算

- 两条圆锥曲线（conics）的焦点（foci）都在 $(0, \pm 1)$：椭圆方面是因为 $\cosh^2 a - \sinh^2 a = 1$，双曲线方面是因为 $\sin^2 b + \cos^2 b = 1$。共焦（confocal）的椭圆和双曲线必定正交，与我们的结果吻合。
- 数值上，取 $a = 1, b = \frac{1}{4}\pi$：$\sinh(1 + \frac{1}{4}\pi\mathrm{i}) \approx 0.8310 + 1.0911\mathrm{i}$，与 $(\sinh 1 \cos \frac{1}{4}\pi,\ \cosh 1 \sin \frac{1}{4}\pi)$ 相符。我们亦在许多随机选取的 (a, b) 上验证了两条曲线的方程，以及纯量积为零。

常见错误

- 把 $\sinh(\mathrm{i}y) = \sin y$ 写成等式，而不是 $\mathrm{i}\sin y$，结果把 u 和 v 的角色对调了。
- 只说“一条双曲线”，却没有解释为甚么只出现 $v > 0$ 的那一支。
- 除以 $\cos b \neq 0$ 之前忘记检查这个条件；条件 $\sin b < 1$ 正是为此而设。

STEP 之外

映射 $z \mapsto \sinh z$ 是保角（conformal）的：凡是导数不为零的地方，它都保持角度不变，所以由直线 $x =$ 常数 和 $y =$ 常数 组成的垂直网格，必定变成由曲线组成的垂直网格，在这里就是共焦的椭圆和双曲线。这就是为甚么在平板或狭缝周围求解拉普拉斯方程（Laplace's equation）时，会出现这类“椭圆坐标”（elliptic coordinates）。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可视化复分析》）把保角映射讲解得十分精彩，书中有许多正是这一类的图。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。