详细解答

STEP II 1989，第 2 题

纯数学 · 幂级数的系数

> **STEP II 1989，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q2

关键思路

一条把函数在 x 处的值与同一函数在 $2x$ 处的值联系起来的三角恒等式（trigonometric identity），会化为幂级数（power series）系数之间的关系。把 x 换成 $2x$，x^n 的系数就乘以 2^n，所以只要把两边都写成幂级数，便可以比较系数（compare coefficients），直接读出所求的关系。有用的窍门是先把整条式乘以 x，使每一项都是在 0 处确实具有幂级数的函数。

解答

以下一律假设 x 很小而且不等于零，因此下面出现的每个级数都收敛（converge）（所涉及的函数在例如 $0 < |x| < \frac{\pi}{4}$ 的范围内性质都良好）。两个收敛的幂级数若在 0 附近的一个区间上相等，它们的系数就相等，所以我们可以比较 x^n 的系数。

a_{n-1} 与 b_n 之间的关系

首先验证 $(*)$：

$$\cot x - \tan x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 2\cot 2x.$$

乘以 x：

$$x\cot x - x\tan x = (2x)\cot(2x).$$

现在把每一项写成级数。

- $x\cot x = 1 + \sum_{n\geq 1} b_n x^n$。

- $x\tan x = \sum_{m\geq 0} a_m x^{m+1} = \sum_{n\geq 1} a_{n-1}x^n$，其中取 $n = m+1$。
- 由于只要 x 很小，$2x$ 也很小，我们可以在 $x\cot x$ 的级数中把 x 换成 $2x$：

$$(2x)\cot(2x) = 1 + \sum_{n\geq 1} b_n (2x)^n = 1 + \sum_{n\geq 1} 2^n b_n x^n.$$

因此

$$1 + \sum_{n\geq 1} (b_n - a_{n-1})x^n = 1 + \sum_{n\geq 1} 2^n b_n x^n.$$

常数项相等，而对 $n \geq 1$ 比较 x^n 的系数，得 $b_n - a_{n-1} = 2^n b_n$，即

$$a_{n-1} = (1 - 2^n)\, b_n \qquad (n \geq 1),$$

这正是所要证明的结果。

想一想 为甚么要先乘以 x 才展开，而不直接处理 $\cot x$ 本身？

$\cot x$ 在 0 处趋向无穷大，所以在该处没有幂级数；题目只给了我们 $x\cot x$ 的级数。把整条恒等式乘以 x 之后，每一项都成为“具有幂级数的函数”的形式，而右边的余切项变成 $(2x)\cot(2x)$，也就是同一个函数在 $2x$ 处的值。这正是我们需要的形式。

系数 c_n

与之配对的恒等式是把差换成和：

$$\cot x + \tan x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 2\operatorname{cosec} 2x.$$

再次乘以 x，

$$x\cot x + x\tan x = (2x)\operatorname{cosec}(2x).$$

利用与先前相同的展开式，以及把 x 换成 $2x$ 后的 $x\operatorname{cosec} x$ 的级数，

$$1 + \sum_{n\geq 1} (b_n + a_{n-1})x^n = 1 + \sum_{n\geq 1} 2^n c_n x^n,$$

所以对 $n \geq 1$ 有

$$2^n c_n = b_n + a_{n-1}.$$

现在用第一个结果消去 b_n。由于 $n \geq 1$，$1 - 2^n \neq 0$，所以 $b_n = \dfrac{a_{n-1}}{1-2^n}$，于是

$$2^n c_n = a_{n-1}\left(\frac{1}{1-2^n} + 1\right) = a_{n-1}\frac{2-2^n}{1-2^n} = a_{n-1}\frac{2\,(2^{n-1}-1)}{2^n - 1}.$$

除以 2^n，并利用 $2/2^n = 1/2^{n-1}$，

$$c_n = \frac{2^{n-1}-1}{2^n-1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\,a_{n-1} \qquad (n \geq 1),$$

这就是所求的结果。

验算

由 $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$ 可得 $a_1 = 1$, $a_3 = \frac{1}{3}$。第一个结果预测 $b_2 = a_1/(1-4) = -\frac{1}{3}$ 和 $b_4 = a_3/(1-16) = -\frac{1}{45}$，与 $x\cot x = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \cdots$ 吻合。第二个结果预测 $c_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{6}$ 和 $c_4 = \frac{7}{15}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3} = \frac{7}{360}$，与 $x\operatorname{cosec} x = 1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4 + \cdots$ 吻合。另外留意 $n = 1$ 的情况：$a_0 = 0$ 而 $b_1 = c_1 = 0$，与两条公式都一致。我们把 sin 和 cos 的级数相除，以分数作精确计算，对所有 $n \leq 23$ 验证了这两个关系，并用 $\tan 0.3 \approx 0.309336$ 和 $0.3\operatorname{cosec} 0.3 \approx 1.015159$ 核对了这些级数。

常见错误

- 忘记下标的平移：$x\tan x$ 中 x^n 的系数是 a_{n-1}，而不是 a_n。
- 在 $x\cot x$ 中以 $2x$ 代替 x 时，却写成 $2x\cot x$ 或 $x\cot 2x$；恒等式中的那一项必须恰好是 $(2x)\cot(2x)$。
- 除以 $1 - 2^n \neq 0$ 之前，没有指出这一点。

STEP 之外

这里的系数,除了相差一些简单的因子之外,就是伯努利数(Bernoulli numbers):$x\cot x = \sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}x^{2k}$，而题目中的关系则以伯努利数表示出正切和余割的级数。两个幂级数若在 0 附近相等，便可以令它们的系数相等，这个事实（幂级数的恒等定理（identity theorem））会在大学第一个分析课程中证明。想进一步了解,可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析学入门教材）中关于幂级数的部分，以及 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以几何直观讲解复分析的著作），这些展开式在书中会从复函数自然地产生。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。