详细解答

STEP II 1989，第 15 题

概率与统计 · 几何概率

STEP II 1989，第 15 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/89-s2-q15

关键思路

“在周界上随机”选取的一点，是按长度均匀分布（uniform distribution）的，所以一切都由总长度 $\pi+2$ 出发。三角形总有一个顶点在圆心 O，所以它的面积是 $\frac{1}{2}ab\sin C$，其中 a 和 b 是两点与 O 的距离，C 是在 O 处的夹角。这样，每个条件情况都化为一个简单的期望值（expectation），再用全期望定律（law of total expectation）把它们合并起来。

解答

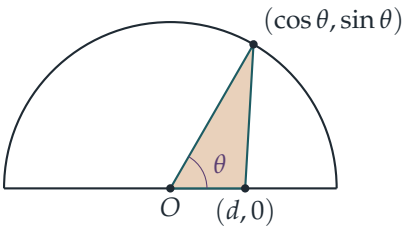
把 O 放在原点，直径沿 x 轴由 $(-1,0)$ 到 $(1,0)$，圆弧位于 $y\geq 0$。周界的长度是 $2+\pi$：直径占 2，圆弧占 π。由于每一点都沿周界均匀分布，

$$\mathrm{P}(\text{一点落在直径上})=\frac{2}{\pi+2},\qquad \mathrm{P}(\text{一点落在圆弧上})=\frac{\pi}{\pi+2}.$$

已知该点落在圆弧上时，它是 $(\cos\theta,\sin\theta)$，其中 θ 在 $[0,\pi]$ 上均匀分布。已知该点落在直径上时，它是 $(d,0)$，其中 d 在 $[-1,1]$ 上均匀分布。

两点互相独立（independent），而“恰好一点在直径上”可以是第一点在直径上，也可以是第二点在直径上，所以

$$\mathrm{P}(\text{恰好一点在直径上})=2\cdot\frac{2}{\pi+2}\cdot\frac{\pi}{\pi+2}=\frac{4\pi}{(\pi+2)^2}.$$



第 (i) 部分

设其中一点是直径上的 $(d,0)$，另一点是圆弧上的 $(\cos\theta,\sin\theta)$。由 O 出发的两条边长度分别是 $|d|$ 和 1，它们之间的夹角是 θ（若 $d<0$，夹角是 $\pi-\theta$，其正弦值相同）。所以

$$A=\tfrac{1}{2}\,|d|\sin\theta.$$

在这个情况下，d 和 θ 互相独立，所以乘积的期望值等于期望值的乘积。由于 d 在 $[-1,1]$ 上均匀分布，$|d|$ 在 $[0,1]$ 上均匀分布，故 $\mathrm{E}|d|=\frac{1}{2}$。另外，

$$\mathrm{E}(\sin\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{2}{\pi}.$$

因此

$$\mathrm{E}(A\mid\text{恰好一点在直径上})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{1}{2\pi},$$

正是所求。

第 (ii) 部分

现在两点都在圆弧上，角度分别是 θ_1 和 θ_2，两者互相独立，并在 $[0,\pi]$ 上均匀分布。两点与 O 的距离都是 1，而它们在 O 处的夹角是 $X=|\theta_1-\theta_2|$，位于 $[0,\pi]$ 之内。所以

$$A=\tfrac{1}{2}\sin X.$$

? **想一想** 为甚么我们可以使用题目给出的 X 的密度函数?

角 θ 量度的是沿单位半圆的弧长，所以在圆弧上均匀地选取两点，等同于在一条长度为 π 的线段上均匀地选取两点。角 X 正是两点之间的距离，所以 X 在 $[0,\pi]$ 上的密度函数（density）是 $2(\pi-x)/\pi^2$。于是

$$\mathrm{E}(\sin X)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin x\,\mathrm{d}x.$$

把积分拆开，$\int_0^{\pi}\pi\sin x\,\mathrm{d}x=2\pi$；再取 $u=x$ 作分部积分（integration by parts），

$$\int_0^{\pi}x\sin x\,\mathrm{d}x=\Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\,\mathrm{d}x=\pi+0=\pi.$$

所以 $\int_0^\pi (\pi - x)\sin x\,\mathrm{d}x = 2\pi - \pi = \pi$，由此得 $\mathrm{E}(\sin X) = \dfrac{2}{\pi}$，以及

$$\mathrm{E}(A \mid \text{两点都不在直径上}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{1}{\pi},$$

正是所求。

A 的期望值

还有第三种情况：若两点都落在直径上，这个“三角形”是退化（degenerate）的（三点都在 x 轴上），所以 $A = 0$。两点都不在直径上的概率是 $(\frac{\pi}{\pi+2})^2$。根据全期望定律，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(A) &= \frac{4\pi}{(\pi+2)^2}\cdot\frac{1}{2\pi} + \frac{\pi^2}{(\pi+2)^2}\cdot\frac{1}{\pi} + \frac{4}{(\pi+2)^2}\cdot 0\\ &= \frac{2+\pi}{(\pi+2)^2}\\ &= \frac{1}{2+\pi},\end{aligned}$$

这就是我们要证明的结果。

验算

- 三种情况的概率 $\frac{4}{(\pi+2)^2}$、$\frac{4\pi}{(\pi+2)^2}$ 和 $\frac{\pi^2}{(\pi+2)^2}$ 相加得 $\frac{(2+\pi)^2}{(\pi+2)^2} = 1$。
- $\mathrm{E}(A) \le \frac{1}{2}$，即不超过最大可能的面积（两条半径互相垂直），这是必然的；事实上 $\frac{1}{2+\pi} \approx 0.1945$。
- 以蒙地卡罗模拟（Monte Carlo simulation）抽取 2×10^6 对点，得出 P(恰好一点) $\approx$ 0.4757（准确值为 0.4754），条件平均值为 0.1591 和 0.3184（准确值为 $\frac{1}{2\pi} \approx 0.1592$ 和 $\frac{1}{\pi} \approx 0.3183$），以及 $\mathrm{E}(A) \approx 0.1944$。

常见错误

- 在 P(恰好一点) 中漏掉因子 2：两点之中任何一点都可以是落在直径上的那一点。
- 把“在直径上”的概率当作 $\frac{1}{2}$：选点是按长度均匀分布，而不是按落在边界的哪一段来平均分配。
- 在第 (ii) 部分使用 $\sin\theta_1\sin\theta_2$ 或类似的式子，而不是两条半径之间夹角的正弦。

STEP 之外

把期望值按各种情况的划分（partition）拆开，即 $\mathrm{E}(A) = \sum_i \mathrm{E}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i)$，就是全期望定律，它是大学一年级概率论中最常用的工具之一；其一般形式 $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(A \mid Y)\big)$ 更是无处不在，由分支过程（branching processes）到马可夫链（Markov chains）都会用到。第 (ii) 部分引用的 X 的密度函数，本身就是一道不错的练习：它来自正方形 $[0, \pi]^2$ 内一条带状区域的面积。这类题目属于几何概率（geometric probability）；Grimmett 与 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率论入门教材）以合适的程度讲解条件期望（conditional expectation）和联合密度函数（joint densities）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。