详细解答

STEP II 1989，第 14 题

力学 · 圆周运动

STEP II 1989，第 14 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

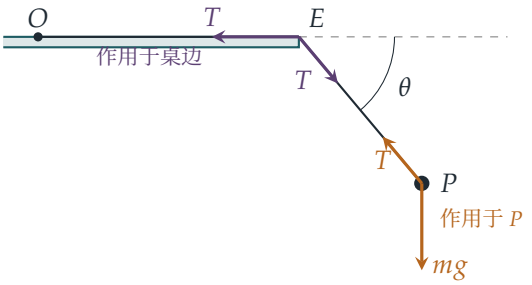
step.maths.org/questions/89-s2-q14

关键思路

质点一经释放，绳子留在桌面上的那一段便保持不动：它在固定端与桌边之间被拉紧。因此桌边相当于一个固定的支点，质点绕着它沿半径为 a 的圆运动，情况与由水平位置释放的单摆（simple pendulum）完全相同。由能量可求得速率，由径向运动方程（radial equation of motion）可求得张力（tension）。桌边是光滑的，所以绳子在桌边两侧的张力相同，而作用于桌边的力，就是沿两段绳子拉扯的两个相等张力的向量和。

解答

模型。 绳子是轻而不可伸长的（light and inextensible），桌面光滑而且很薄，质点是一个点质量（point mass）。设 O 为绳子的固定端，E 为绳子跨过桌边的那一点，于是 $OE = l - a$，而悬垂部分 EP 的长度为 a。设 θ 为悬垂部分从水平方向（即它起初所指、背离桌子的方向）向下转过的角。



由于 O 固定，而绳子一直保持拉紧（下文会验证 $T > 0$），OE 这一段留在桌面上静止不动。因此 P 沿以 E 为圆心、半径为 a 的圆运动。

速率。 桌面光滑，而张力始终与 P 的运动方向垂直，所以两者都不作功，机械能守恒（conservation of mechanical energy）。当绳子转过角 θ 时，P 下降了高度 $a\sin\theta$，故由静止开始，

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mga\sin\theta \qquad\Longrightarrow\qquad v^2 = 2ga\sin\theta.$$

张力。 沿 PE 向圆心 E 的方向分解：张力沿 PE 作用，而重量沿 PE 的分量为 $mg\sin\theta$，方向背离 E（当 $0<\theta<\pi$ 时，P 位于 E 的水平以下）。所以

$$T - mg\sin\theta = \frac{mv^2}{a} = 2mg\sin\theta, \qquad \text{由此得} \qquad \boxed{T = 3mg\sin\theta.}$$

当 $0<\theta<\pi$ 时这个值为正，所以绳子自始至终保持拉紧。在 $\theta=\pi$ 时有 $v=0$：质点刚好到达桌子底面、与 E 同高的位置，然后往回摆。因此运动发生在 $0\le\theta\le\pi$ 的范围内。

作用于桌边的力。 桌边光滑，所以绳子在桌边两侧的张力都是 T。绳子以两个大小为 T 的拉力压在桌边上：一个沿 EO，水平指向固定端；另一个沿 EP。取 x 轴为水平背离桌子的方向，y 轴为铅垂向上。沿 EO 和 EP 的单位向量（unit vector）分别是 $(-1,0)$ 和 $(\cos\theta,-\sin\theta)$，所以作用于桌边的力为

$$\mathbf{F} = T\,(\cos\theta - 1,\ -\sin\theta).$$

它的大小为

$$|\mathbf{F}| = T\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta} = T\sqrt{2-2\cos\theta} = 2T\sin\tfrac{\theta}{2}$$

这里用了 $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$，以及当 $0\le\theta\le\pi$ 时 $\sin\frac{\theta}{2}\ge 0$。（从几何上看，两个夹角为 $\pi-\theta$ 的相等的力 T，合力为 $2T\cos\frac{\pi-\theta}{2}$，结果相同。）代入 T 和 $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$，

$$|\mathbf{F}| = 6mg\sin\theta\sin\tfrac{\theta}{2} = 12mg\,s^2\sqrt{1-s^2}, \qquad \text{其中} s=\sin\tfrac{\theta}{2}\in[0,1].$$

想一想 怎样才能干净俐落地求 $s^2\sqrt{1-s^2}$ 的最大值?

由于它是非负的，只需求它的平方的最大值，即 $h(u)=u^2(1-u)$，其中 $u=s^2\in[0,1]$。于是 $h'(u)=2u-3u^2=u(2-3u)$，当 $0<u<\frac{2}{3}$ 时为正，当 $\frac{2}{3}<u\le 1$ 时为负。所以 h 在 $[0,1]$ 上的最大值出现在 $u=\frac{2}{3}$，此时 $h=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$。因此 $s^2\sqrt{1-s^2}$ 的最大值为 $\sqrt{4/27}=\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$，而

$$|\mathbf{F}|_{\max} = 12mg\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{8mg}{\sqrt{3}},$$

正如所求。它出现在 $\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{2}{3}$ 时，即 $\cos\theta = 1-2\sin^2\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{3}$，所以 $\theta\approx 109.5°$：这时质点已经越过桌边的正下方，正往桌子底下摆回去。

验算

- 在 $\theta = \frac{\pi}{2}$（绳子铅垂）时，速率为 $\sqrt{2ga}$，而 $T = 3mg$，这正是由水平位置释放的单摆的熟悉结果。这时作用于桌边的力为 $T\sqrt{2} = 3\sqrt{2}\,mg \approx 4.24mg$，略小于 $8mg/\sqrt{3} \approx 4.62mg$，与最大值出现在铅垂位置之后这一点吻合。
- 在 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 时，质点在与桌边同高的位置瞬时静止，所以 $T = 0$，桌边不受任何力，与公式所示一致。
- 我们对运动方程 $\ddot{\theta} = (g/a)\cos\theta$ 作了数值积分：由径向方程求得的 T 与 $3mg\sin\theta$ 相符，误差在 10^{-12} 以内；而作用于桌边的力的最大值出现在 $\theta \approx 1.9106$（即 $\arccos(-\frac{1}{3})$），其值为 $4.6188\,mg$，与 $8/\sqrt{3}$ 相符。

常见错误

- 把作用于桌边的力当作只有 T，或只取悬垂绳子拉力的铅垂部分。桌面上的那段绳子也会水平地拉扯桌边，两个拉力必须以向量方式相加。
- 求最大值时只考虑到 $\theta \le \frac{\pi}{2}$ 为止。质点会继续摆到桌子底下，而最大值正是出现在这个较后的阶段。

STEP 之外

这里的张力是一种*约束力*（constraint force）：它不作功，其大小恰好足以令质点保持在圆周上。在拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）中，这类力会从运动方程中完全消失，事后才再求回来（就像我们利用径向方程所做的那样），或者藉拉格朗日乘数（Lagrange multipliers）求得。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）在这个程度上对圆周运动、约束和能量方法有细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。