详细解答

STEP II 1989，第 13 题

力学 · 转动惯量

> **STEP II 1989，第 13 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q13

本题在 *Beyond STEP* 第 11.7 节杆中的辛普森法则中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch11/simpsons-rod.html

关键思路

一切都建基于转动惯量（moment of inertia）的两个事实。平行轴定理（parallel axis theorem）指出，对任何一条轴的转动惯量，都由质量、质心（centre of mass）以及对通过质心的平行轴的转动惯量所决定。此外，转动惯量具有可加性（additive），所以我们可以把一个物体切成若干小块，再把每一块换成等效的东西。薄片（lamina）就是一叠幼杆，所以只要知道怎样替换一根杆，就能替换整块薄片。

解答

对每一条轴均等效

设 ℓ 为任意一条轴，并设 ℓ_O 为通过 O 的平行轴，与 ℓ 相距 d。物体与质点（particle）系统的质量同为 m，质心同为 O，所以可以对两者分别应用平行轴定理：

$$I_\ell^{\text{物体}} = I_{\ell_O}^{\text{物体}} + md^2, \qquad I_\ell^{\text{质点}} = I_{\ell_O}^{\text{质点}} + md^2.$$

由于 ℓ_O 通过 O，根据假设 $I_{\ell_O}^{\text{物体}} = I_{\ell_O}^{\text{质点}}$。因此两式的右边相等，于是对每一条轴 ℓ 都有 $I_\ell^{\text{物体}} = I_\ell^{\text{质点}}$，这正是所要证明的。

均匀杆

把均匀杆（uniform rod）沿 x 轴放置，由 $x=-a$ 伸展至 $x=a$，于是它的质心 O 就是原点。在 $x=-a$、0、a 处分别放置质量为 p、q、r 的质点。要令总质量为 m 且质心位于 O，我们需要

$$p+q+r=m, \qquad -pa+ra=0,$$

所以 $r=p$ 及 $q=m-2p$。

现在取任意一条通过 O、与杆成角 θ 的轴。杆上位于 x 的一点与这条轴的距离为 $|x|\sin\theta$。因此，对任何一条通过 O 的轴，转动惯量都是 $\sin^2\theta$ 乘以 $\sum(\text{质量})\,x^2$，我们只需令这一个和相等便可。对于杆，每个微元的质量为 $\frac{m}{2a}\,\mathrm{d}x$，所以

$$\int_{-a}^{a}\frac{m}{2a}\,x^2\,\mathrm{d}x=\frac{m}{2a}\cdot\frac{2a^3}{3}=\tfrac{1}{3}ma^2,$$

而对于质点，这个和是 $pa^2+q\cdot 0+pa^2=2pa^2$。当 $p=\frac{1}{6}m$ 时，两者对每个 θ 都相等。所以这根杆动力等效（dynamically equivalent）于

$$\tfrac{1}{6}m \text{ 于每一端}, \qquad \tfrac{2}{3}m \text{ 于中点}.$$

根据第一部分，两者对任何一条轴的转动惯量都相同，而不限于通过 O 的轴。

长方形薄片

设长方形的中心为 O，边长为 $2a$（平行于 x 轴）及 $2b$，于是它每单位面积的质量为 $M/(4ab)$。把它切成平行于 x 轴的幼条。位于高度 y、阔度为 δy 的幼条是一根长度为 $2a$、质量为 $\delta M=\frac{M}{2b}\,\delta y$ 的均匀杆。

> **想一想** 幼条的中心并不在 O。为甚么我们仍然可以把每条幼条换成它的三个质点？

第一部分的用处正在于此。每条幼条与它的三个质点对每一条轴的转动惯量都相同，而不只是对通过幼条本身中心的轴。转动惯量可以相加，所以对任何一条轴，薄片的转动惯量都与全部替换质点所组成的系统相同。这个系统的总质量同样是 M，质心同样是 O，因为每条幼条的替换质点与该幼条有相同的质量和质心。

位于高度 y 的幼条换成：在 $(\pm a,y)$ 两点各放 $\frac{1}{6}\delta M=\frac{M}{12b}\,\delta y$，以及在 $(0,y)$ 放 $\frac{2}{3}\delta M=\frac{M}{3b}\,\delta y$。当 y 由 $-b$ 变到 b 时，这些质点填满三根长度为 $2b$ 的均匀杆：

- 沿两边 $x=\pm a$ 各有一根，每根的质量为 $\frac{M}{12b}\cdot 2b=\frac{1}{6}M$；
- 沿中线 $x=0$ 有一根，质量为 $\frac{M}{3b}\cdot 2b=\frac{2}{3}M$。

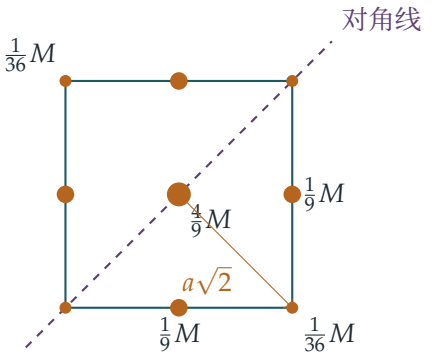
现在以同样的可加性论证，对这三根杆逐一应用均匀杆的结果：

- 每根边杆（$\frac{1}{6}M$）变成：在两端（即长方形的角）各有 $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}M=\frac{1}{36}M$，以及在中点（即长度为 $2b$ 的边的中点）有 $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}M=\frac{1}{9}M$；
- 中央的杆（$\frac{2}{3}M$）变成：在两端（即长度为 $2a$ 的边的中点）各有 $\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}M=\frac{1}{9}M$，以及在中心有 $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}M=\frac{4}{9}M$。

所以每个角有 $\frac{1}{36}M$，每条边的中点有 $\frac{1}{9}M$，中心有 $\frac{4}{9}M$。总和为 $\frac{4}{36}M+\frac{4}{9}M+\frac{4}{9}M=M$，而由对称性可知质心为 O。这就是所求的等效系统。

正方形对其对角线

对于边长为 $2a$ 的正方形，把四个角放在 $(\pm a,\pm a)$，并取对角线 $y=x$。点 (x_0,y_0) 与这条直线的距离为 $|x_0-y_0|/\sqrt{2}$。



- 角 (a,a)、$(-a,-a)$ 和中心都在对角线上，没有贡献。
- 角 $(a,-a)$、$(-a,a)$ 与对角线的距离为 $2a/\sqrt{2}=a\sqrt{2}$。
- 每个中点 $(\pm a,0)$、$(0,\pm a)$ 与对角线的距离为 $a/\sqrt{2}$。

因此

$$I_{\text{对角线}}=2\cdot\tfrac{1}{36}M\cdot 2a^2+4\cdot\tfrac{1}{9}M\cdot\tfrac{1}{2}a^2=\tfrac{1}{9}Ma^2+\tfrac{2}{9}Ma^2=\tfrac{1}{3}Ma^2.$$

非均匀杆

设杆的长度为 $2a$，沿 x 轴由 $x=0$ 伸展至 $x=2a$，线密度（line density）为 kx。那么

$$m=\int_0^{2a}kx\,\mathrm{d}x=2ka^2,\qquad\text{所以}\qquad k=\frac{m}{2a^2}.$$

它的质心位于

$$\bar{x}=\frac{1}{m}\int_0^{2a}kx^2\,\mathrm{d}x=\frac{k}{m}\cdot\frac{8a^3}{3}=\frac{4a}{3},$$

并且

$$\int_0^{2a} kx^3\,\mathrm{d}x = \frac{k\,(2a)^4}{4} = 4ka^4 = 2ma^2.$$

与均匀杆的情况一样，所有点都在同一条直线上，所以对一条通过质心、与杆成角 θ 的轴，转动惯量为 $\sin^2\theta\sum(\text{质量})(x-\bar{x})^2$。若质量与质心都相同，则 $\sum(\text{质量})(x-\bar{x})^2 = \sum(\text{质量})x^2 - m\bar{x}^2$，所以只需令 $\sum(\text{质量})\,x^2$ 相等便已足够，而这正是对通过端点 $x=0$ 的垂直轴的转动惯量。

设质点为：$x=0$ 处的 p_0、$x=a$ 处的 p_1 及 $x=2a$ 处的 p_2。令质量、一阶矩（first moment）和二阶矩（second moment）分别相等，得出方程

$$\begin{aligned} p_0 + p_1 + p_2 &= m, \\ p_1 a + 2p_2 a &= \tfrac{4}{3}ma, \\ p_1 a^2 + 4p_2 a^2 &= 2ma^2. \end{aligned}$$

把第三式（除以 a^2）减去第二式（除以 a），得 $2p_2 = \frac{2}{3}m$，所以 $p_2 = \frac{1}{3}m$。于是 $p_1 = \frac{4}{3}m - \frac{2}{3}m = \frac{2}{3}m$，最后 $p_0 = m - \frac{2}{3}m - \frac{1}{3}m = 0$。

位于较轻一端的质点质量为零，所以只需要两个质点：中点的 $\frac{2}{3}m$ 和较重一端的 $\frac{1}{3}m$。

验算

- 边长为 $2a$ 的正方形薄片，对一条通过中心、位于薄片平面内且平行于一边的轴，其转动惯量的标准结果是 $\frac{1}{3}Ma^2$。根据垂直轴定理（perpendicular axis theorem）和对称性，每一条通过中心而位于平面内的轴都给出相同的值，所以对角线也必然如此。结果吻合。
- 对于非均匀杆，两个质点给出质量 m、一阶矩 $\frac{2}{3}m\cdot a + \frac{1}{3}m\cdot 2a = \frac{4}{3}ma$（所以质心位于 $\frac{4}{3}a$）以及二阶矩 $\frac{2}{3}ma^2 + \frac{4}{3}ma^2 = 2ma^2$，全部符合要求。
- 在数值上，我们用细密的点质量网格，把每个物体与它的质点系统对空间中 100–200 条随机的轴（不通过中心）作比较。均匀杆和非均匀杆的误差小于 10^{-7}，长方形的误差为 4×10^{-5}（网格误差），而正方形对其对角线在 $M=a=1$ 时给出 0.33332。

常见错误

- 把每条幼条换成它的三个质点，却没有说明为甚么可以这样做。幼条的中心并不在 O，所以你需要第一部分关于“任何轴”的结果。
- 在最后一部分，只施加质量和质心两个条件。两条方程不足以确定三个质量：正是转动惯量的条件迫使 $p_0 = 0$。

STEP 之外

对于在空间中运动的刚体（rigid body），在动力学上起决定作用的是它的质量、质心和惯性张量（inertia tensor）。惯性张量是一个对称的 3×3 矩阵，可给出对每一条通过质心的轴的转动惯量。两个物体若这三者都相同，在相同的力作用下运动便完全一样，这就是“动力等效”这个名称贴切的原因。用几个点质量去配合一个分布的头几阶矩，也是数值积分（numerical integration）背后的想法。均匀杆的权重 $\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}$ 正好就是辛普森法则（Simpson's rule），而若除了权重之外连位置也一并选取，便会引出高斯求积法（Gaussian quadrature）。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics* 详细讲述了惯性张量和刚体运动。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。