详细解答

STEP II 1989，第 12 题

力学 · 刚体平衡

> **STEP II 1989，第 12 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q12

关键思路

作用在薄片（lamina）上的力只有三个：它的重量和两根钉子的反作用力（reaction）。光滑的钉子只会沿垂直于所接触的边的方向施力，而在长方形中，这就表示每个反作用力都平行于另一条边。一个物体若在三个互不平行的力作用下保持平衡（equilibrium），这三个力的作用线（line of action）必须交于一点。因此，两个反作用力的交点必定位于通过中心的铅垂线上。两个结果都可由这一事实，加上两根钉子等高这个条件推导出来。

解答

建立模型

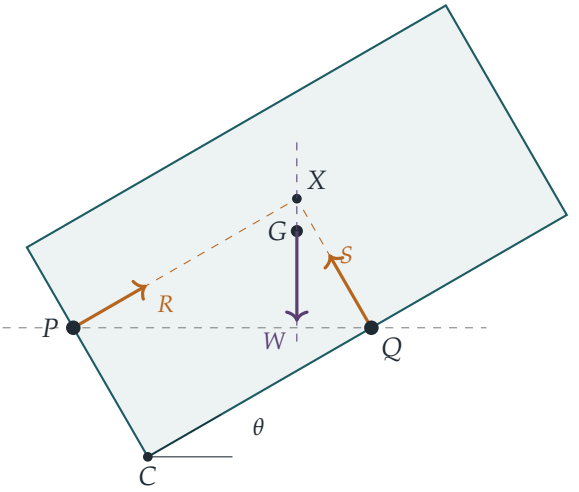
我们把薄片看成一个重量为 W、中心为 G 的均匀刚性长方形，并把两根钉子看成位于同一高度的光滑点 P 和 Q。设 C 为最低的顶点。通过 C 而长度为 $2a$ 的边搁在 P 上，其中 $CP = p$；通过 C 而长度为 $2b$ 的边搁在 Q 上，其中 $CQ = q$。$2b$ 边与水平线成锐角 θ，所以（与它垂直的）$2a$ 边与铅垂线成角 θ。

最方便的做法是沿两条边设立坐标：由 C 出发，沿 $2b$ 边量度 u，沿 $2a$ 边量度 v。于是

$$C = (0,0), \qquad P = (0,p), \qquad Q = (q,0), \qquad G = (b,a).$$

点 (u,v) 相对于 C 的水平位移和铅垂位移为

$$x = u\cos\theta - v\sin\theta, \qquad y = u\sin\theta + v\cos\theta.$$



两个反作用力交于通过 G 的铅垂线上

P 处的反作用力 R 垂直于 $2a$ 边，所以它平行于 $2b$ 边：它的作用线是 $v = p$。同理，Q 处的反作用力 S 沿 $u = q$ 作用。这两条直线交于 $X = (q, p)$，即长方形 $CPXQ$ 的第四个顶点。

对 X 取力矩（moment），两个反作用力的力矩均为零，所以重量的力矩也必须为零：通过 G 的铅垂线通过 X。换句话说，X 和 G 的水平坐标相同：

$$q\cos\theta - p\sin\theta = b\cos\theta - a\sin\theta, \qquad \text{即} \qquad (q-b)\cos\theta = (p-a)\sin\theta. \qquad (1)$$

（分解各力可得 $R = W\sin\theta$ 和 $S = W\cos\theta$，两者皆为正数，所以钉子确实能够提供这些力。）

第一个结果

由于 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，$\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 都是正数，所以由 (1) 可知 $q - b$ 与 $p - a$ 同号。若 $p < a$，则 (1) 的右边为负数，所以 $q - b < 0$，即 $q < b$。这正是所求的结果：若该顶点与 $2a$ 边上的钉子相距少于 a，则它与另一根钉子相距少于 b。

> ? **想一想** 为甚么问题还未完结？d 在哪里出现？

方程 (1) 只用到力矩条件。它还未涉及 d，而且 p 和 q 并非互相独立：两根钉子等高，并且相距 d。现在我们把这两个事实用上。

与 d 的关系

两根钉子位于同一高度，所以 P 和 Q 的 y 坐标相等：

$$p\cos\theta = q\sin\theta, \qquad \text{所以} \qquad p = q\tan\theta. \tag{2}$$

它们的水平距离为 d：

$$d = x_Q - x_P = q\cos\theta + p\sin\theta = q\cos\theta + \frac{q\sin^2\theta}{\cos\theta} = \frac{q}{\cos\theta}. \tag{3}$$

（等价地说，三角形 CPQ 以 C 为直角，斜边（hypotenuse）$PQ = d$ 是水平的，所以 $q = d\cos\theta$ 及 $p = d\sin\theta$。）

现在把 $q = d\cos\theta$ 和 $p = d\sin\theta$ 代入 (1) 的第一个形式的左边：

$$\begin{aligned} b\cos\theta - a\sin\theta &= q\cos\theta - p\sin\theta \\ &= d\cos^2\theta - d\sin^2\theta \\ &= d\cos 2\theta, \end{aligned}$$

这就是所求的结果。

验算

- 正方形的情况 $a = b$、$\theta = \frac{\pi}{4}$：两边都等于零。根据对称性，对角线 CG 是铅垂的，所以结果吻合；而且这对任何 d 都成立，正方形对称地放置时理应如此。
- 取 $a = 1$、$b = 2$、$\theta = \frac{\pi}{6}$，平衡时需要 $q = d\cos\theta$ 及 $d = (b\cos\theta - a\sin\theta)/\cos 2\theta \approx 2.4641$。由此得 $p \approx 1.2321 > a$ 及 $q \approx 2.1340 > b$，与 (1) 吻合。以 $R = W\sin\theta$ 和 $S = W\cos\theta$ 对 G 取力矩，结果为零。
- 数值上，超过 10^5 个随机的平衡位置（随机选取 a、b、θ，而钉子落在边上）全部满足该恒等式，误差在 10^{-14} 以内，而且从不违反“$p < a \Rightarrow q < b$”。

常见错误

- 把钉子的反作用力当作铅垂。光滑接触的施力方向垂直于*接触面*（这里是薄片的边），而不是垂直于地面。
- 混淆了哪一条边与水平线成角 θ：$2a$ 边是与*铅垂线*成角 θ。

STEP 之外

三力原理是刚体（rigid body）静力学一般理论的特殊情况：一个力系处于平衡，当且仅当它的合力以及它对任意一点的合力矩同时为零。到了大学，这会发展成力螺旋（wrench）和虚功（virtual work）的语言。若用虚功的方法，可以在薄片与两根钉子保持接触的约束下，把 G 的高度减至最小，从而求出这个平衡位置。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）对刚体静力学和力矩（torque）有严谨的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。