详细解答

STEP II 1989，第 11 题

力学 · 连接质点与冲量

> **STEP II 1989，第 11 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q11

关键思路

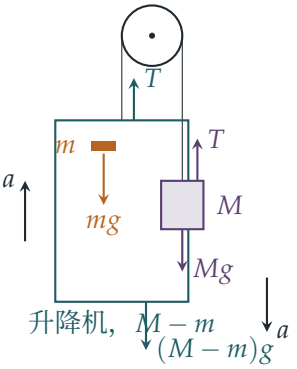
升降机与平衡锤一开始互相平衡，所以升降机的质量 M 必定已包括瓷砖在内。瓷砖一旦脱落，升降机便比平衡锤轻，于是向上加速，而瓷砖则自由下坠，地板因而升上来迎向瓷砖。处理碰撞时，把升降机、缆索和平衡锤视为沿缆索运动的单一系统。这个系统的“沿缆索的动量”只会因重力而改变，而碰撞产生的冲量（impulse）则属于系统的内力。

解答

建立模型

我们把升降机、平衡锤和瓷砖都当作质点（particle），并假设缆索轻而不可伸长（light and inextensible），绕过一个光滑而轻的滑轮（pulley）。导轨是光滑的，所以不会施加任何垂直方向的力。瓷砖掉下之前，系统处于静止状态，两边的质量分别为 M 和 M。因此升降机的质量 M 已包括瓷砖。（否则升降机一边的重量是 $(M+m)g$，另一边只有 Mg，系统不可能静止。）

瓷砖脱落之后，升降机的质量为 $M-m$，平衡锤的质量为 M，而瓷砖是一个自由质点。



到达地板所需的时间

设升降机以加速度 a 向上加速，则平衡锤以加速度 a 向下加速。设 T 为缆索的张力（tension）。由牛顿第二定律（Newton's second law）可得

$$\begin{aligned} &\text{升降机（向上）：} && T-(M-m)g=(M-m)a,\\ &\text{平衡锤（向下）：} && Mg-T=Ma. \end{aligned}$$

把两式相加便可消去 T：

$$a=\frac{mg}{2M-m},\qquad T=M(g-a)=\frac{2M(M-m)g}{2M-m}>0,$$

所以缆索一直保持拉紧。

想一想 为甚么不能直接说瓷砖在重力作用下坠落了距离 h？

因为地板也在移动。瓷砖以 g 向下加速，地板以 a 向上加速，两者都由静止开始。因此两者之间的距离以恒定的相对加速度（relative acceleration）收窄：

$$g+a=g+\frac{mg}{2M-m}=\frac{2Mg}{2M-m}.$$

这段距离最初是 h，所以瓷砖在 $\frac{1}{2}(g+a)t^2=h$ 时着地，由此可得

$$t^2=\frac{2h}{g+a}=\frac{(2M-m)h}{Mg},\qquad t=\sqrt{\frac{(2M-m)h}{Mg}}.$$

这并不是题目所印的式子，题目中出现的是 $2(M-m)$ 而不是 $2M-m$。两者只在 $m=0$ 时才一致，而我们的结果会在下文以数值方法逐步模拟运动来验证。题目所印的式子，需要升降机以 $mg/(M-m)$ 加速才会成立。如果忘记了平衡锤也要被加速，并把张力当作维持在 Mg，就会得到这个结果。我们相信题目所印的公式是原题的误植或疏忽。题目其余部分完全不依赖这个式子。

碰撞

在撞击前的一刻，升降机向上运动，平衡锤向下运动，两者的速率都是 $u = at$。瓷砖则以速率 $v = gt$ 向下运动。于是

$$(2M - m)u = (2M - m) \cdot \frac{mg}{2M - m}\, t = mgt = mv.$$

现在考虑碰撞本身。取“正方向”为升降机向上／平衡锤向下，即缆索带动两者一起运动的方向。撞击历时极短，所以有限的力（各物体的重量）所产生的冲量可以忽略。仅有的冲量是瓷砖与地板之间的冲量（它是“升降机连瓷砖”这个整体的内力），以及缆索中的冲击张力（impulsive tension）J。设 w 为碰撞后的共同速率（升降机连瓷砖，质量为 M，向上；平衡锤向下）。碰撞是完全非弹性的（perfectly inelastic），所以瓷砖最终随地板一起运动。于是

$$\begin{aligned} \text{升降机连瓷砖：} &\quad Mw - [(M - m)u - mv] = J, \\ \text{平衡锤：} &\quad Mw - Mu = -J. \end{aligned}$$

把两式相加，

$$2Mw = (M - m)u + Mu - mv = (2M - m)u - mv = 0,$$

所以 $w = 0$：升降机停了下来。（另外 $J = Mu > 0$，所以缆索确实是被猛然拉紧而不是变松，这与我们的假设一致。）撞击之后，两边的质量再次是 M 和 M，互相平衡，所以一切保持静止。

想一想 为甚么在撞击前的一刻，总的“沿缆索的动量”是零?

撞击之前，作用在这三个物体上而又沿运动方向的外力只有重力，按上面所定的正方向计算，其净效果为 $Mg - (M - m)g - mg = 0$。（滑轮的反作用力不作功，而缆索属于系统内部。）所以这个动量自始至终保持在初始值 0。碰撞同样不能改变它。

能量损失

系统由静止开始，最后也归于静止，所以损失的机械能（mechanical energy）等于开始与结束之间重力势能（gravitational potential energy）的减少量。在坠落期间，设升降机上升了 s_1（因此平衡锤下降了 s_1），并设瓷砖下降了 s_2。瓷砖走完了原来相距的 h，所以 $s_1 + s_2 = h$。势能的变化为

$$(M - m)g\, s_1 - Mg\, s_1 - mg\, s_2 = -mg(s_1 + s_2) = -mgh.$$

碰撞之后再没有任何东西移动，所以损失的能量是 mgh，正如题目所求。撞击前一刻所有的动能（kinetic energy）都在碰撞中消失。留意这个论证完全没有用到 t 的值。

验算

- 若 $m \to 0$，则 $a \to 0$ 且 $t \to \sqrt{2h/g}$，即自由落体落在静止的地板上。两条公式都通过这个测试，所以它无法分辨两者。
- 取 $M = 5$、$m = 1$、$h = 1$ 及 $g = 9.8$，以数值方法逐步模拟运动，得 $t \approx 0.4286\,\text{s}$，与 $\sqrt{9/49} \approx 0.4286$ 吻合。题目所印的公式则给出 $\sqrt{8/49} \approx 0.404\,\text{s}$。
- 在同一个模拟中，撞击前一刻的动能等于 mgh，准确至五位有效数字，而碰撞后的速率为零，误差只在舍入范围之内。

常见错误

- 把升降机的质量当作 M *另加*瓷砖：这样系统一开始就不可能静止。
- 忘记了平衡锤的惯性（inertia），以致算出升降机的加速度为 $mg/(M-m)$。
- 在碰撞中只对升降机和瓷砖使用线动量守恒（conservation of linear momentum），忽略了缆索中的冲击张力。

STEP 之外

这里所用的“沿缆索的动量”是一种*广义动量*（generalised momentum）：对于只有一个自由度（degree of freedom）的系统，其坐标就是已绕过滑轮的缆索长度。拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）把这套做法系统化。凡是力在其上没有净效果的坐标，都对应一个守恒的广义动量，而冲击约束（impulsive constraint）也可用同样的方法处理。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学导论）仔细讨论了以绳和滑轮连接的系统，以及碰撞中的冲量和能量。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。