详细解答

STEP II 1989，第 10 题

纯数学 · 直线与平面

> **STEP II 1989，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q10

关键思路

空间中的两条直线不交于唯一一点，有三种情况：两者是同一条直线；两者平行；或者两者是*异面直线*（skew lines），分处不同平面而互不相遇。因此“恰好交于一点”需要两个条件：两个方向不平行，而且两条直线位于同一平面上。向量积（cross product）可以同时处理这两个条件。至于那两个平面，其交线的方向就是两个法向量（normal）的向量积，而最后一部分其实只是第一部分换了个样子再出现一次。

解答

第一部分：两条直线何时恰好交于一点

两条直线相交之处满足 $\mathbf{a}+\lambda\mathbf{u}=\mathbf{b}+\mu\mathbf{v}$，即

$$\lambda\mathbf{u}-\mu\mathbf{v}=\mathbf{b}-\mathbf{a}.$$

要它们是真正的直线，需要 $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$。于是：

- 若 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 平行（$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$），两条直线要么平行而相异（没有公共点），要么完全重合（有无限多个公共点）。无论哪一种，都不是恰好一点。
- 若 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$，则 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 张成（span）一个平面，而方程有解当且仅当 $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ 位于该平面上，即与 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 垂直。解若存在则必唯一，因为 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 线性无关（independent）。

所以条件是

$$\mathbf{u}\neq\mathbf{0},\quad \mathbf{v}\neq\mathbf{0},\quad \mathbf{u}\times\mathbf{v}\neq\mathbf{0},\quad (\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=0.$$

（头两个条件已由第三个推出，但仍值得写明。）若最后一个条件不成立，两条直线便是异

面直线。

第二部分：两个平面

两个法向量是 $\mathbf{n}_1 = (1,1,b)$ 和 $\mathbf{n}_2 = (b,b,1)$，而

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \left(1-b^2,\ b^2-1,\ 0\right) = (1-b^2)(1,-1,0).$$

两个平面不交于一条直线，当且仅当它们的法向量平行；在这里即 $1-b^2=0$，所以 $b=1$ 或 $b=-1$。

- $b=1$：两条方程都变成 $x+y+z=3$。
- $b=-1$：两条方程是 $x+y-z=1$ 和 $-x-y+z=-1$，同样是同一个平面。

所以在这两种情况下，两个平面都是重合，而不是平行而分开。

现在取 $b \neq \pm 1$。交线沿 $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ 的方向，所以可以取 $\mathbf{u} = (1,-1,0)$。要找出线上的点，留意 x 和 y 只以 $s = x+y$ 的形式出现：

$$s + bz = b+2, \qquad bs + z = 2b+1.$$

从第二式减去第一式的 b 倍，得 $(1-b^2)z = 1-b^2$，所以 $z=1$（由于 $b^2 \neq 1$，可以相除），继而 $s=2$。因此交线是 $x+y=2$，$z=1$，与 b 无关。

我们需要在这条直线上找一点 $\mathbf{a}$ 使得 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{u} = 0$，即 $x-y=0$。连同 $x+y=2$，得 $x=y=1$，所以

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \qquad b \neq \pm 1.$$

点 $\mathbf{a}$ 就是由原点到这条直线的垂足。

最后部分

坐标同时满足两条方程 $(*)$ 的点，当 $b \neq \pm 1$ 时组成上述直线，当 $b = \pm 1$ 时则组成整个平面。我们把这两种情况分开处理。

> ? **想一想** 当 $b = \pm 1$ 时，同时满足两条方程的点组成甚么集合?

是整个平面，而不是空集，因为我们已发现两个平面重合。在这些情况下，答案因此完全不同。

情况 $b \neq \pm 1$。我们需要题目所给的直线与直线 $\mathbf{r} = (1,1,1) + \lambda(1,-1,0)$ 恰好交于一点。应用第一部分，取 $\mathbf{a} = (1,1,1)$，$\mathbf{u} = (1,-1,0)$，$\mathbf{b} = (0,0,c)$，$\mathbf{v} = (1,d,0)$。于是

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = (0,\,0,\,d+1), \qquad (\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = (-1,-1,c-1)\cdot(0,0,d+1) = (c-1)(d+1).$$

我们需要 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$，所以 $d\neq -1$，于是 $(c-1)(d+1)=0$ 迫使 $c=1$。所以条件是 $c=1$ 和 $d\neq -1$。（直接验证：题目所给的直线上 $z=c$，所以只有当 $c=1$ 时它才与 $z=1$ 相遇，而此时 $x+y=\mu(1+d)=2$ 在 $d\neq -1$ 时有唯一解 $\mu=2/(1+d)$。）

情况 $b=\pm 1$。现在我们需要题目所给的直线与一个平面恰好交于一点。点 $(\mu,d\mu,c)$ 位于 $x+y+z=3$ 上（对应 $b=1$）当 $\mu(1+d)=3-c$，位于 $x+y-z=1$ 上（对应 $b=-1$）当 $\mu(1+d)=1+c$。每条方程对 μ 恰有一个解，当且仅当 $1+d\neq 0$；若 $d=-1$，直线与平面平行，方程或无解，或有无限多个解。这里 c 可取任何值。

答案。恰有一个这样的点，当且仅当

$$d\neq -1 \quad 及 \quad \big(c=1 \text{ 或 } b=\pm 1\big),$$

可以简洁地写成 $d\neq -1$ 及 $(b^2-1)(c-1)=0$。

验算

- 把 $(1+\lambda,1-\lambda,1)$ 代入 $(*)$：$2+b=b+2$ 及 $2b+1=2b+1$，对所有 b 和 λ 都成立。
- 取 $b=2$，$c=1$，$d=3$，交点对应 $\mu=\frac{1}{2}$，即 $(\frac{1}{2},\frac{3}{2},1)$：$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+2=4=b+2$ 及 $1+3+1=5=2b+1$。
- 用电脑以精确算术测试了 $\{-3,\ldots,3,\frac{1}{2},-\frac{5}{3}\}$ 中所有的 b,c,d（共 729 个情况），直接求解 μ，结果解的数目为一，恰好就是上述条件成立之时。

常见错误

- 只因两条直线不平行，就说它们交于一点。在三维空间中，它们可以是异面直线。
- 以为当 $b=\pm 1$ 时两个平面平行而分开，从而断定完全没有这样的点。检查一下右边的常数：两个平面是重合的。
- 除以 $1-b^2$ 而没有说明它为何不等于零。

STEP 之外

这其实是一个小型的线性方程组（system of linear equations），只是换了个样子：三个未知数的两条方程，当系数矩阵的秩（rank）为 2 时，解组成一条直线；当秩为 1 时，解组成一个平面（或者无解）。加入直线的参数式后，它就变成一个关于 μ 的超定方程组（overdetermined system），而“恰有一个解”就是一个关于秩与相容性（consistency）的命题。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）正是由这里出现的行图像（平面相交）和列图像（向量的组合）出发，建立起这一切。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。