详细解答

STEP II 1989，第 1 题

纯数学 · 三次方程的三角解法

> **STEP II 1989，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/89-s2-q1

关键思路

这条恒等式（identity）说明，当 $z = \cos\theta$ 时，$4z^3 - 3z$ 其实就是乔装了的 $\cos 3\theta$。因此，只要能把三次方程（cubic）化成 $4z^3 - 3z = k$ 的形式，而且 $|k| \le 1$，解这条方程就等同于解 $\cos 3\theta = k$，而后者有三个容易求得的解。两个代换（substitution）各司其职：平移 $y = x + a$ 用来消去平方项，缩放 $z = by$ 则把余下两个系数（coefficient）之比调整为 $4 : 3$。

解答

恒等式

利用复角公式（addition formulae）及 $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$，

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta \\ &= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta \\ &= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta)\cos\theta \\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,\end{aligned}$$

正是所求。

化简三次方程

设 $y = x + a$，则 $x = y - a$，而 $24(y-a)^3 - 72(y-a)^2 + \cdots$ 中 y^2 的系数是 $-72a - 72$。要消去这一项，须取 $a = -1$，即 $x = y + 1$。于是

$$\begin{aligned} &24(y+1)^3 - 72(y+1)^2 + 66(y+1) - 19 \\ &\quad = (24y^3 + 72y^2 + 72y + 24) - (72y^2 + 144y + 72) \\ &\qquad + (66y + 66) - 19 \\ &\qquad\qquad = 24y^3 - 6y - 1, \end{aligned}$$

所以 $(*)$ 变成

$$24y^3 - 6y = 1.$$

现在代入 $y = z/b$：

$$\frac{24}{b^3}z^3 - \frac{6}{b}z = 1.$$

> **想一想** 应该怎样选取 b，才能令左方成为 $4z^3 - 3z$ 的倍数？

我们需要 z^3 与 z 的系数之比为 $4 : -3$，所以

$$\frac{24/b^3}{6/b} = \frac{4}{3} \quad\Longrightarrow\quad \frac{4}{b^2} = \frac{4}{3} \quad\Longrightarrow\quad b^2 = 3.$$

取 $b = \sqrt{3}$。这时方程是 $\dfrac{8}{\sqrt{3}}z^3 - \dfrac{6}{\sqrt{3}}z = 1$，两边乘以 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，得

$$4z^3 - 3z = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

所以 $a = -1$、$b = \sqrt{3}$ 及 $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$，其中 $z = \sqrt{3}\,(x-1)$。（若改取 $b = -\sqrt{3}$，则 $k = -\frac{\sqrt{3}}{2}$，最后得到的根（root）完全相同。）

求根

由于 $|k| \le 1$，我们可以写 $z = \cos\theta$，而根据恒等式，方程变成

$$\cos 3\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ.$$

所以 $3\theta = 30^\circ,\ 390^\circ,\ 750^\circ$，从而 $\theta = 10^\circ,\ 130^\circ,\ 250^\circ$。这三个角给出三个不同的 $\cos\theta$ 值，而三次方程最多只有三个根，所以这就是全部的根：

$$z = \cos 10^\circ,\quad \cos 130^\circ,\quad \cos 250^\circ.$$

把代换还原，$x = 1 + \dfrac{z}{\sqrt{3}}$，所以

$$x_1 = 1 + \frac{\cos 10^\circ}{\sqrt{3}} = 1.5686\ldots \approx 1.57,$$
$$x_2 = 1 + \frac{\cos 130^\circ}{\sqrt{3}} = 0.6289\ldots \approx 0.629,$$
$$x_3 = 1 + \frac{\cos 250^\circ}{\sqrt{3}} = 0.8025\ldots \approx 0.803.$$

并非每条三次方程都适用

对于一般的首一（monic）三次方程 $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$，平移的选择别无他法：代入 $x = y - a$ 后，y^2 的系数是 $\alpha - 3a$，所以 $a = \frac{\alpha}{3}$，由此得到 $y^3 + py + q = 0$，其中 $p = \beta - \frac{\alpha^2}{3}$。代入 $y = z/b$ 并乘以 $4b^3$，得

$$4z^3 + 4pb^2 z + 4qb^3 = 0,$$

要与 $4z^3 - 3z$ 吻合，须有 $4pb^2 = -3$，即 $b^2 = -\dfrac{3}{4p}$。只有当 $p < 0$ 时，这才有实数解。

一个反例（counterexample）是

$$x^3 + 3x - 4 = 0.$$

这里 $\alpha = 0$，所以 $a = 0$ 而 $p = 3 > 0$；我们需要 $b^2 = -\frac{1}{4}$，但没有实数 b 能满足这个条件。所以这条方程根本无法化成 $4z^3 - 3z = k$ 的形式。（方程本身确实有根：它可分解为 $(x-1)(x^2 + x + 4) = 0$，而当中二次式的判别式（discriminant）为 $-15 < 0$，所以 $x = 1$ 是它唯一的实根。失效的是这个方法，而不是方程。）

即使 $p < 0$，这个方法也可能在下一步失效。对于 $x^3 - 3x - 4 = 0$，代换 $x = 2z$ 给出 $4z^3 - 3z = 2$；但 $|\cos 3\theta| \le 1$，所以没有实数 θ 能使 $\cos 3\theta = 2$。

验算

- 三个根之和应为 $\frac{72}{24} = 3$，三个根之积应为 $\frac{19}{24}$。事实上，各 cos 项之和为零（$\cos 10^\circ + \cos 130^\circ + \cos 250^\circ = 0$），而数值上 $1.5686 \times 0.6289 \times 0.8025 = 0.7917 \approx \frac{19}{24}$。
- 把 $x = 1.5686$ 代入 $24x^3 - 72x^2 + 66x - 19$，在计算机的准确度之内结果为零；其余两个根亦然。

常见错误

- 求得 $\theta = 10^\circ$ 便停下来：另外两个根来自 $3\theta = 390^\circ$ 和 750°。

- 弄错 a 的正负号：$y = x + a$ 而 $x = y + 1$，即 $a = -1$，不是 $+1$。
- 举反例时，选了一条 $p < 0$ 而且 $|k| \le 1$ 的三次方程，但这个方法其实完全应付得来。在断言方法失效之前，先检查 $b^2 > 0$ 和 $|k| \le 1$ 这两个条件。

STEP 之外

这个方法恰好在三次方程有三个实根时适用，这正是所谓“不可约情形”（casus irreducibilis）：尽管每个答案都是实数，卡尔达诺（Cardano）公式却迫使你绕道复数的立方根。当 $|k| > 1$ 时，把 cos 换成 cosh，同样的想法依然可行，因为 $\cosh 3u = 4\cosh^3 u - 3\cosh u$；对于 $x^3 - 3x - 4 = 0$，这给出实根 $x = 2\cosh\left(\frac{1}{3}\operatorname{arcosh} 2\right) \approx 2.196$。至于哪些多项式方程可以用根式求解（solved by radicals）这个更深入的问题，则通往伽罗瓦理论（Galois theory）；Allenby 的 *Rings, Fields and Groups* 是很好的入门读物，而 Needham 的 *Visual Complex Analysis* 则展示了立方根的几何。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。