详细解答

STEP I 1989，第 9 题

纯数学 · 图像的变换

> **STEP I 1989，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q9

关键思路

只要画出基本的三次曲线 (cubic)，其余每一个图像都只是同一条曲线经坐标变换后的样子。代换(substitution) $X = ax + b, Y = cy + d$ 不过是在每个方向上先作伸缩(stretch)(或反射（reflection)），再作平移（translation），而且它会把转向点（turning point）变到转向点。因此，全部工夫就在于找出原来三次曲线的两个转向点，并追踪它们去了哪里。

解答

基本图像

写成 $y = \frac{1}{8}(x^3 - 12x) = \frac{1}{8}x(x^2 - 12)$。于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3x^2 - 12}{8} = \frac{3(x-2)(x+2)}{8}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{6x}{8} = \frac{3x}{4}.$$

斜率（gradient）在 $x = \pm 2$ 处为零。

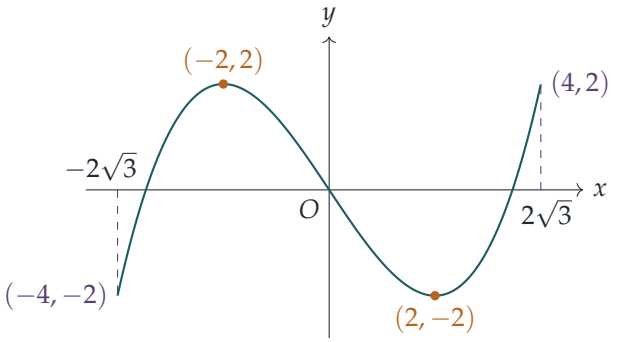
- 在 $x = -2$: $y = \frac{1}{8}(-8 + 24) = 2$, 而 $y'' = -\frac{3}{2} < 0$, 所以 $(-2, 2)$ 是局部极大点 (local maximum)。
- 在 $x = 2$: $y = \frac{1}{8}(8 - 24) = -2$, 而 $y'' = \frac{3}{2} > 0$, 所以 $(2, -2)$ 是局部极小点（local minimum)。

其他有用的特征：

- 曲线与坐标轴相交于 $x(x^2 - 12) = 0$ 之处，即 $x = 0$ 及 $x = \pm 2\sqrt{3} \approx \pm 3.46$。
- 这个函数是奇函数（odd function），所以图像绕原点有 2 阶旋转对称（rotational

symmetry），而原点亦是拐点（point of inflection）；该处的斜率为 $-\frac{3}{2}$。

- 在两端，$y(4) = \frac{1}{8}(64 - 48) = 2$ 及 $y(-4) = -2$。所以曲线恰好在 $x = 4$ 处回升到极大点的高度。



为何转向点会变到转向点

想一想 当我们变换坐标时，怎样知道新的转向点就是旧转向点的像?

若 $X = ax + b$ 及 $Y = cy + d$，其中 $a, c \neq 0$，则由链式法则（chain rule）可得

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{\mathrm{d}Y/\mathrm{d}x}{\mathrm{d}X/\mathrm{d}x} = \frac{c}{a}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

它恰好在 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 为零之处为零。所以新的转向点就是 $(-2, 2)$ 和 $(2, -2)$ 的像。（若 $c/a < 0$，图形会被反射，极大点与极小点的角色互换。）从几何上看：

- $X = \frac{1}{2}x$ 把图像沿水平方向压缩，压缩因子为 2；
- $Y = \frac{1}{2}y$ 把图像沿垂直方向压缩，压缩因子为 2；
- 再把 1 加到 X 或 Y 上，则把图像向右或向上平移 1 个单位。

四个变换后的图像

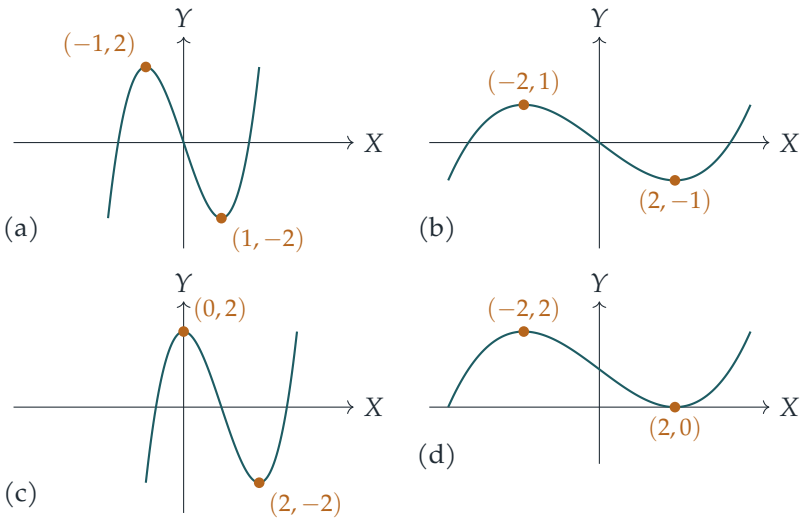
把每个映射分别应用于 $(-2, 2)$、$(2, -2)$ 以及范围 $-4 \leq x \leq 4$：

(a) $X = \frac{1}{2}x$, $Y = y$：极大点 $(-1, 2)$，极小点 $(1, -2)$，范围为 $-2 \leq X \leq 2$。曲线是 $Y = X^3 - 3X$。

(b) $X = x$, $Y = \frac{1}{2}y$：极大点 $(-2, 1)$，极小点 $(2, -1)$，范围为 $-4 \leq X \leq 4$。曲线是 $16Y = X^3 - 12X$。

(c) $X = \frac{1}{2}x + 1$, $Y = y$：极大点 $(0, 2)$，极小点 $(2, -2)$，范围为 $-1 \leq X \leq 3$。这是把图像 (a) 向右移 1 个单位，拐点在 $(1, 0)$。

(d) $X = x, Y = \frac{1}{2}y + 1$：极大点 $(-2,2)$，极小点 $(2,0)$，范围为 $-4 \le X \le 4$。这是把图像 (b) 向上移 1 个单位，拐点在 $(0,1)$；它在极小点处与 X 轴相切。



最后部分

我们需要 $a, c \neq 0$（否则图像会塌缩成一条直线），这样新图像的转向点就是

$$(-2a + b,\ 2c + d) \quad \text{及} \quad (2a + b,\ -2c + d).$$

这两点必须是 $(0,0)$ 和 $(1,1)$，次序不拘，由此得到两组线性方程组。

情况 1：$(-2,2) \mapsto (0,0)$ 及 $(2,-2) \mapsto (1,1)$。于是 $-2a + b = 0$ 及 $2a + b = 1$，所以 $b = \frac{1}{2}, a = \frac{1}{4}$；又 $2c + d = 0, -2c + d = 1$，所以 $d = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{4}$。

情况 2：$(-2,2) \mapsto (1,1)$ 及 $(2,-2) \mapsto (0,0)$。同理可得 $a = -\frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{4}, d = \frac{1}{2}$。

所以其中一个答案是

$$a = \tfrac{1}{4}, \quad b = \tfrac{1}{2}, \quad c = -\tfrac{1}{4}, \quad d = \tfrac{1}{2},$$

另一个答案是 $a = -\frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{4}, d = \frac{1}{2}$。

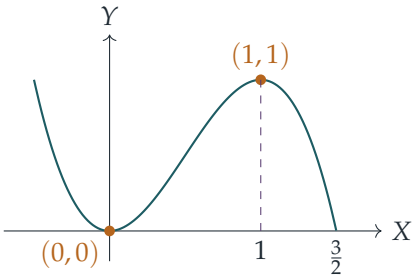
新曲线的方程值得求出来。在情况 1 中，$x = 4X - 2$ 及 $y = 2 - 4Y$，所以

$$\begin{aligned} 8(2 - 4Y) &= (4X - 2)^3 - 12(4X - 2) \\ &= 64X^3 - 96X^2 + 48X - 8 - 48X + 24 \\ &= 64X^3 - 96X^2 + 16, \end{aligned}$$

化简后得

$$Y = 3X^2 - 2X^3 = X^2(3 - 2X).$$

这条曲线有 $Y' = 6X(1-X)$，所以它的转向点确实是位于 $(0,0)$ 的极小点和位于 $(1,1)$ 的极大点。情况 2 给出完全相同的曲线：由于这个三次函数是奇函数，把 (x,y) 换成 $(-x,-y)$ 并不会改变原来的图像，而这正是两种情况之间唯一的分别。



当 $-4 \le x \le 4$ 时，这条曲线由 $(-\frac{1}{2}, 1)$ 延伸至 $(\frac{3}{2}, 0)$。

验算

- 把 $X = 0$ 和 $X = 1$ 代入 $Y = 3X^2 - 2X^3$，分别得 0 和 1，而 $Y' = 6X(1-X)$ 在这两处都等于零。
- 每个变换后的图像都保留了原图像的一个特征：曲线在范围的一端回到某个转向点的高度。例如在 (d) 中，$Y = 2$ 于 $X = 4$，而 $Y = 0$ 于 $X = -4$。
- 数值上，在 $x = 1$ 处我们有 $y = -\frac{11}{8}$；在情况 1 中这给出 $X = 0.75, Y = 0.84375$，而 $3(0.75)^2 - 2(0.75)^3 = 0.84375$。

常见错误

- 弄错伸缩的方向：$X = \frac{1}{2}x$ 令图像变窄，而不是变阔，因为位于 $x = 2$ 的点会移到 $X = 1$。
- 忘记把定义域（domain）也一并变换：图像 (c) 的范围是 $-1 \le X \le 3$，而不是 $-4 \le X \le 4$。
- 最后部分只给出一个解，而没有留意到转向点还有另一种对应次序（给出任何一个已经足够，但第一种情况中的 $c < 0$ 很容易被忽略）。

STEP 之外

映射 $X = ax + b, Y = cy + d$ 是仿射变换（affine transformation），而最后部分说明，任何有两个转向点的三次曲线，都可以用其中一个这样的变换移到标准曲线 $Y = 3X^2 - 2X^3$

上；这就是电脑图像学中所用的“smoothstep”函数。像这样按某个变换群（group of transformations）来为曲线分类，是贯穿几何与线性代数（linear algebra）的一个主题。至于这个故事中与矩阵有关的一面，可参阅 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。