详细解答

STEP I 1989，第 8 题

纯数学 · 倍角公式

> **STEP I 1989，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q8

关键思路

棣莫弗定理（De Moivre's theorem）把 $\cos n\theta$ 化为 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n$ 的实部（real part），再把 $\sin^2\theta$ 换成 $1-\cos^2\theta$，便得到一个以 $\cos\theta$ 为变量的多项式（polynomial）。至于最后一部分，那个六次多项式（sextic）看来像是刚求得的两个多项式的某种组合，于是我们着手找出这个组合：原来它正是 $\cos 6\theta - \cos 4\theta$ 的一半，而解 $\cos 6\theta = \cos 4\theta$ 十分容易。

解答

以下一律记 $c = \cos\theta$ 及 $s = \sin\theta$，故 $s^2 = 1 - c^2$。

第 (i) 部分

由棣莫弗定理，$\cos 4\theta + \mathrm{i}\sin 4\theta = (c + \mathrm{i}s)^4$。以二项式定理（binomial theorem）展开，并只保留实数项（即 $\mathrm{i}s$ 的幂次为偶数的各项），

$$\begin{aligned}\cos 4\theta &= c^4 - \tbinom{4}{2}c^2s^2 + s^4 \\ &= c^4 - 6c^2(1-c^2) + (1-c^2)^2 \\ &= c^4 - 6c^2 + 6c^4 + 1 - 2c^2 + c^4 \\ &= 8c^4 - 8c^2 + 1,\end{aligned}$$

这正是所求的恒等式（identity）。

第 (ii) 部分

同样地，取 $(c+\mathrm{i}s)^6$ 的实部，得

$$\cos 6\theta = c^6 - 15c^4s^2 + 15c^2s^4 - s^6,$$

其中用到 $\binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 15$ 以及 $\mathrm{i}^2 = -1$、$\mathrm{i}^4 = 1$、$\mathrm{i}^6 = -1$。设 $u = c^2$，则 $s^2 = 1-u$：

$$\begin{aligned}\cos 6\theta &= u^3 - 15u^2(1-u) + 15u(1-u)^2 - (1-u)^3 \\ &= u^3 - 15u^2 + 15u^3 + 15u - 30u^2 + 15u^3 - 1 + 3u - 3u^2 + u^3 \\ &= 32u^3 - 48u^2 + 18u - 1 \\ &= 32c^6 - 48c^4 + 18c^2 - 1,\end{aligned}$$

证毕。

方程

把左方记为 $p(x) = 16x^6 - 28x^4 + 13x^2 - 1$。

> ? **想一想** 这个多项式并不是那两个恒等式中的任何一个，它们又怎能派上用场?

比较系数（coefficient）。首项系数 16 是 32 的一半，常数项 -1 是 -2 的一半，这提示我们把 (ii) 减去 (i)：

$$\cos 6\theta - \cos 4\theta = 32c^6 - 56c^4 + 26c^2 - 2 = 2\,p(c).$$

因此，若 $x = \cos\theta$，则

$$p(x) = 0 \iff \cos 6\theta = \cos 4\theta.$$

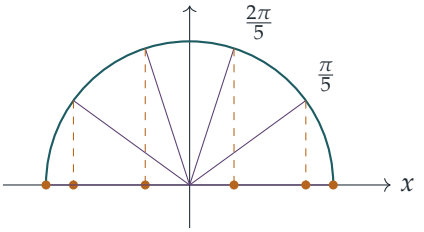
而 $\cos A = \cos B$ 当且仅当存在整数 k 使得 $A = \pm B + 2k\pi$。在这里即是

$$6\theta = 4\theta + 2k\pi \;\Rightarrow\; \theta = k\pi, \qquad \text{或} \qquad 6\theta = -4\theta + 2k\pi \;\Rightarrow\; \theta = \frac{k\pi}{5}.$$

第一组解已包含在第二组之内，所以解为 $\theta = k\pi/5$，而对应的 $x = \cos\theta$ 的值是

$$\cos 0 = 1,\quad \cos\tfrac{\pi}{5},\quad \cos\tfrac{2\pi}{5},\quad \cos\tfrac{3\pi}{5} = -\cos\tfrac{2\pi}{5},\quad \cos\tfrac{4\pi}{5} = -\cos\tfrac{\pi}{5},\quad \cos\pi = -1.$$

k 取其他值时只会重复以上各数。这是六个互不相同的数（余弦在 $[0,\pi]$ 上严格递减），而 p 的次数（degree）为 6，所以它们就是 p 的全部根（root），不论实根还是复根。特别要留意，代换 $x = \cos\theta$ 只能涵盖 $-1 \le x \le 1$，但我们并没有遗漏这个区间以外的根，因为已经再没有其他根可找了。



这些还不算是可接受的答案，因为题目不容许使用数值近似，我们应该给出这些余弦的准确值。由于 $x=1$ 是根，$x=-1$ 也是根（p 是偶函数），所以 x^2-1 是一个因式（factor）。把它除去（或比较系数），

$$p(x)=(x^2-1)(16x^4-12x^2+1).$$

这个四次因式是 x^2 的二次式：

$$x^2=\frac{12\pm\sqrt{144-64}}{32}=\frac{12\pm4\sqrt{5}}{32}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{8}.$$

注意

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2=\frac{6+2\sqrt{5}}{16}=\frac{3+\sqrt{5}}{8},\qquad\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2=\frac{6-2\sqrt{5}}{16}=\frac{3-\sqrt{5}}{8}.$$

x^2 的两个值都是正数，所以各给出两个实数 x。因此方程的实根就是以下六个数：

$$x=\pm1,\qquad x=\pm\frac{1+\sqrt{5}}{4},\qquad x=\pm\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

额外的收获是：按大小与上面的列表对照（$\cos\frac{\pi}{5}>\cos\frac{2\pi}{5}>0$），便得到两个著名的值 $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ 和 $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$。

验算

- 当 $\theta=0$ 时，两个恒等式都给出 $1=1$；当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，(i) 给出 $1=1$，(ii) 给出 $-1=-1$。
- p 的各系数之和为 $16-28+13-1=0$，印证了 $x=1$ 是根。
- 以数值计算，$\frac{1+\sqrt{5}}{4}\approx0.80902=\cos36^\circ$ 及 $\frac{\sqrt{5}-1}{4}\approx0.30902=\cos72^\circ$，而 p 在这两点的值都是零（在舍入误差范围内）。

常见错误

- 遗漏了由 $6\theta=-4\theta+2k\pi$ 得出的解，结果只找到 $x=\pm1$。
- 把答案写成 $\cos\frac{\pi}{5}$ 之类，或写成小数：题目要求的是准确的根式（surd）形式。
- 没有解释为何不存在 $|x|>1$ 的根：数一数次数便可解决。

STEP 之外

把 $\cos n\theta$ 用 $\cos\theta$ 表示的多项式，就是切比雪夫多项式（Chebyshev polynomial）T_n，所以 (i) 和 (ii) 说的是 $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ 和 $T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$。切比雪夫多项式在数值分析（numerical analysis）中占有核心地位，它们的根正是多项式插值（polynomial interpolation）的最佳取点。$\cos\frac{\pi}{5}$ 中出现 $\sqrt{5}$，反映了正五边形的几何与黄金比（golden ratio）。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）是从几何角度认识棣莫弗定理和单位根（roots of unity）的绝佳读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。