详细解答

STEP I 1989，第 7 题

纯数学 · 曲线描绘与最优化

STEP I 1989，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/89-s1-q7

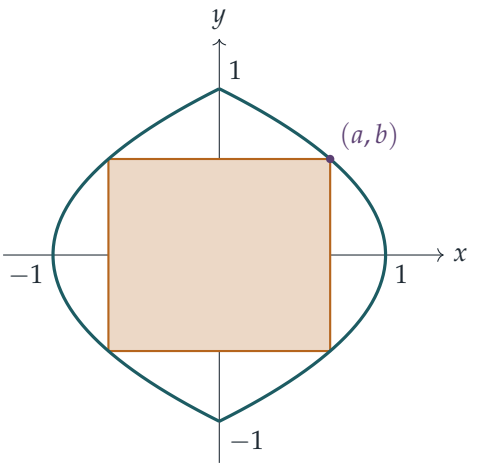
关键思路

这条曲线对两条坐标轴都对称，所以最大的长方形应以原点为中心，并有一个顶点位于第一象限的曲线上。这样一来，原本要在两个变量中搜索的问题，就变成求一个单变量函数的最大值。对于一般的曲线，只要把 $|y|$ 解出来，写成 $1-|x|$ 的幂，同样的想法依然适用。

解答

草图

由于 $y^2 \geq 0$，必须有 $1-|x| \geq 0$，故 $-1 \leq x \leq 1$。当 $x \geq 0$ 时，曲线是 $x = 1-y^2$，即一条开口向左、顶点（vertex）为 $(1,0)$ 的抛物线（parabola）；当 $x \leq 0$ 时，曲线是它的镜像 $x = y^2 - 1$。两段弧在 $(0,\pm 1)$ 相接，并在该处形成尖角（斜率 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \mp\frac{1}{2}$ 与 $\pm\frac{1}{2}$ 并不相同），又在 $(\pm 1, 0)$ 垂直地穿过 x 轴。这条曲线是一个闭合的环，围住区域 $|x| + y^2 \leq 1$，形状像一个圆角的菱形。



最大的长方形

设长方形 $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ 位于区域 $|x| + y^2 \leq 1$ 之内。令 $A = \max(|x_1|, |x_2|)$ 及 $B = \max(|y_1|, |y_2|)$。各顶点为 (x_i, y_j)，其中 i, j 可独立选取，所以必有一个顶点同时满足 $|x| = A$ 和 $|y| = B$。该顶点位于区域之内，故 $A + B^2 \leq 1$。于是长方形 $[-A, A] \times [-B, B]$ 也位于区域之内，因为当 $|x| \leq A$、$|y| \leq B$ 时，

$$|x| + y^2 \leq A + B^2 \leq 1.$$

它的阔度 $2A \geq x_2 - x_1$，高度 $2B \geq y_2 - y_1$，所以它的面积不会比原来的小。因此我们可以只考虑以原点为中心、顶点为 $(\pm a, \pm b)$ 的长方形；再把顶点向外推，直至碰到曲线为止，便有 $a = 1 - b^2$，其中 $0 \leq b \leq 1$。

? **想一想** 为甚么只需考虑以原点为中心的长方形?

这正是上面的论证：把每条边换成它到坐标轴的两个距离中较大的一个，长方形仍然留在曲线之内（由对称性可知），而且绝不会缩小。

面积为

$$S(b) = 4ab = 4b(1 - b^2) = 4b - 4b^3, \qquad S'(b) = 4 - 12b^2.$$

$S'(b) = 0$ 于 $b = 1/\sqrt{3}$，在此之前 $S' > 0$，在此之后 $S' < 0$，而且 $S(0) = S(1) = 0$，所以这就是最大值。此时 $a = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$，而

$$S_{\max} = 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{8}{3\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{27}},$$

正如所求。

一般的曲线

现在考虑 $y^{2m} = (1-|x|)^n$。左边为非负数，而由于 n 是奇数，$(1-|x|)^n$ 与 $1-|x|$ 同号。所以同样有 $|x| \le 1$，取（正的）$2m$ 次方根，得

$$|y| = (1-|x|)^k, \qquad k = \frac{n}{2m} > 0.$$

（假如 n 是偶数，则任何 x 都可以取，曲线会伸延至无穷远，因而不存在最大的长方形：这就是 n 必须是奇数的原因。）这条曲线同样是一个经过 $(\pm 1, 0)$ 和 $(0, \pm 1)$ 的闭合环，对两条坐标轴都对称，围住区域 $|y| \le (1-|x|)^k$。由于 $(1-|x|)^k$ 随 $|x|$ 增加而递减，与之前相同的论证说明，我们可以取顶点为 $(\pm a, \pm b)$ 的长方形，其中 $b = (1-a)^k$，$0 \le a \le 1$。它的面积为

$$S(a) = 4a(1-a)^k.$$

求导（differentiate），得

$$S'(a) = 4(1-a)^{k-1}[(1-a) - ka] = 4(1-a)^{k-1}[1-(1+k)a],$$

当 $0 < a < \frac{1}{1+k}$ 时为正，当 $\frac{1}{1+k} < a < 1$ 时为负。由于 $S(0) = S(1) = 0$，最大值出现于 $a = \frac{1}{1+k}$，此时 $1-a = \frac{k}{1+k}$：

$$S_{\max} = \frac{4}{1+k}\left(\frac{k}{1+k}\right)^k = \frac{4k^k}{(1+k)^{k+1}}.$$

代入 $k = \frac{n}{2m}$ 及 $1+k = \frac{n+2m}{2m}$，$2m$ 的各个幂合并为 $(2m)^{-k} \cdot (2m)^{k+1} = 2m$，所以

$$S_{\max} = \frac{8m\, n^{n/(2m)}}{(n+2m)^{(n+2m)/(2m)}} = 8m\left(\frac{n^n}{(n+2m)^{n+2m}}\right)^{1/(2m)}.$$

验算

- 取 $m = n = 1$，得 $8\left(\frac{1}{27}\right)^{1/2} = 8/\sqrt{27} \approx 1.5396$，与第一部分的结果一致。
- 对 $(m,n) = (1,3), (2,1), (2,3), (3,5)$ 在 $a \in [0,1]$ 上作精细的数值搜索，结果与公式吻合；例如 $(m,n) = (2,1)$ 给出 $16/5^{5/4} \approx 2.1400$。随机选取的偏离中心的长方形，面积从未超过这个值。
- 当 n 固定而 $m \to \infty$ 时，$k \to 0$，曲线逐渐填满正方形 $|x| \le 1$、$|y| \le 1$；公式的值趋向 4，正是该正方形的面积。

常见错误

- 漏掉因子 4：顶点 (a,b) 所对应的长方形，阔度是 $2a$，高度是 $2b$。
- 忽略 n 为奇数的重要性：若 n 是偶数，曲线便不是有界的。

STEP 之外

求 $a(1-a)^k$ 的最大值，其实是一道乔装了的加权算术—几何平均不等式（weighted AM–GM）问题：把 $a \cdot \left(\frac{1-a}{k}\right)^k$ 写成 $1+k$ 个和为常数的因子之积，无须微积分便可求得最大值。曲线 $|x|^p + |y|^q = 1$ 与 ℓ^p 范数（norm）的单位球（unit ball）是近亲，后者会在大学一年级的分析和线性代数中出现。想进一步了解这类不等式，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*；至于最优化（optimisation）背后的分析，则可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。