详细解答

STEP I 1989，第 6 题

纯数学 · 法线与微分方程

STEP I 1989，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/89-s1-q6

关键思路

在 P 点的法线（normal）斜率（gradient）为 $-1/\mathrm{f}'(x)$，所以要求 Q，只须把 $X=0$ 代入法线方程。于是 PQ^2 就是水平距离的平方加上垂直距离的平方，而题目给出的长度便化成一条只含 $\mathrm{f}'(x)$ 的方程。唯一要留神的是最后开平方的一步：正负号的取舍由极小点（minimum point）决定。

解答

Q 的 y 坐标

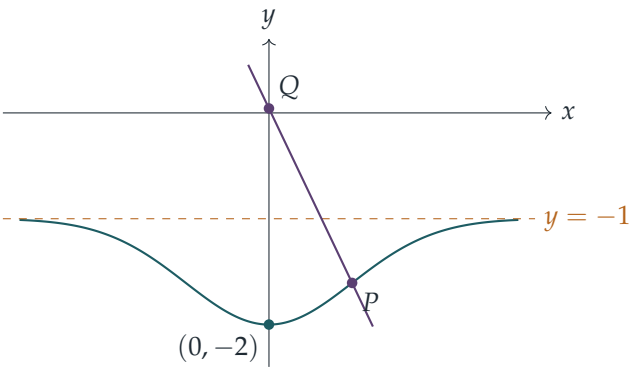
在 $P=(x,\mathrm{f}(x))$ 处，切线（tangent）的斜率为 $\mathrm{f}'(x)$，所以（只要 $\mathrm{f}'(x)\neq 0$）法线的斜率为 $-1/\mathrm{f}'(x)$。以 (X,Y) 表示法线上动点的坐标，法线方程为

$$Y-\mathrm{f}(x)=-\frac{1}{\mathrm{f}'(x)}\,(X-x).$$

代入 $X=0$，法线与 y 轴相交于

$$Y=\mathrm{f}(x)+\frac{x}{\mathrm{f}'(x)},\qquad \text{所以}\qquad Q=\left(0,\ \mathrm{f}(x)+\frac{x}{\mathrm{f}'(x)}\right).$$

（若 $\mathrm{f}'(x)=0$，法线是铅垂线，除非 $x=0$，否则它永不与 y 轴相交。）



微分方程（differential equation）

P 与 Q 的水平距离为 x，垂直距离为 $x/\mathrm{f}'(x)$，所以

$$PQ^2 = x^2 + \frac{x^2}{(\mathrm{f}'(x))^2}.$$

令上式等于 $\mathrm{e}^{x^2} + x^2$，两边的 x^2 项互相抵消，得到

$$\frac{x^2}{(\mathrm{f}'(x))^2} = \mathrm{e}^{x^2}, \qquad \text{即} \qquad \boxed{(\mathrm{f}'(x))^2 = x^2\,\mathrm{e}^{-x^2}.}$$

这等价于 $\mathrm{f}'(x) = \pm x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$。

极小点位于 $(0,-2)$ 的曲线

> **想一想** 应该取哪一个正负号？正负号又会否在曲线中途改变？

由于 f' 连续（continuous）（曲线有极小点，所以我们假设它可微（differentiable）），而 $\mathrm{f}'(x)^2 = x^2\mathrm{e}^{-x^2}$ 只在 $x = 0$ 时为零，因此 f' 在 $x > 0$ 上或在 $x < 0$ 上都不可能变号：要变号就必须经过零。要使 $(0,-2)$ 成为极小点，f 必须在紧靠 0 的左方递减，在紧靠其右方递增，所以当 $x < 0$ 时 $\mathrm{f}'(x) < 0$，当 $x > 0$ 时 $\mathrm{f}'(x) > 0$。这正好与 x 的正负号相同，因此在两边都有

$$\mathrm{f}'(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

（若全程取负号，则在 $x = 0$ 处得到极大点；若两边取不同的正负号，则 f' 的正负号保持不变，即得到拐点（point of inflection）。）

进行积分，由于 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{-x^2/2}) = -x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$，

$$\mathrm{f}(x) = -\mathrm{e}^{-x^2/2} + c.$$

由条件 $f(0) = -2$ 得 $-1 + c = -2$，所以 $c = -1$，曲线为

$$\boxed{y = -1 - e^{-x^2/2}.}$$

它在 $x = 0$ 处取得极小值 -2，并在两边向渐近线（asymptote）$y = -1$ 上升，一如略图所示。

验算

- 在 $x = 1$ 处：$f(1) = -1 - e^{-1/2} \approx -1.6065$，而 $f'(1) = e^{-1/2} \approx 0.6065$，所以 $Q \approx (0,\, 0.0422)$，且 $PQ \approx \sqrt{1 + 1.6487^2} \approx 1.9283$，等于 $\sqrt{e+1}$，符合要求。
- 电脑在 2000 个随机点上，以法线与 y 轴的交点重新计算 Q，所得的 PQ 与 $\sqrt{e^{x^2} + x^2}$ 相符，（相对）误差在 10^{-15} 以内。

常见错误

- 误用切线的斜率 $f'(x)$，而不是法线的斜率 $-1/f'(x)$，结果得出 Q 位于 $f(x) - xf'(x)$。
- 开平方时直接写 $f'(x) = xe^{-x^2/2}$，却没有说明为何舍去负号。

STEP 之外

在这一题，一个对曲线上每一点都成立的几何条件，化成了一条一阶微分方程，但方程中的 f' 以平方形式出现，所以要靠额外的资料选定分支，才能确定唯一的解。这类没有就 y' 解出的方程，正是常微分方程（ODE）的唯一性定理（uniqueness theorem）开始需要小心处理的地方，并由此引申到包络线（envelope）和奇解（singular solution）。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations* 涵盖一阶方程及其存在性与唯一性理论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。