详细解答

STEP I 1989，第 5 题

纯数学 · 二项式系数恒等式

STEP I 1989，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/89-s1-q5

关键思路

二项展开式（binomial expansion）是关于 x 的恒等式（identity），所以无论代入甚么数都成立。取 $x = 1$ 会把所有系数（coefficient）加起来，取 $x = -1$ 则以正负相间的符号把它们相加；把两者结合，就能把偶数项与奇数项的系数分开。至于 (ii) 中的加权和，$\binom{n}{r}$ 前面的因子 r 正好是对 x^r 求导时产生的，所以我们先对展开式求导（differentiate），然后再代入。

解答

对正整数 n，

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n,$$

其中 $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$。这对所有实数 x 都成立。

第 (i) 部分

设 $E = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$ 为偶数项系数之和，$O = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n-1}$ 为奇数项系数之和。由于 n 是偶数，最后一项 $\binom{n}{n}$ 属于 E，而 $\binom{n}{n-1}$ 属于 O，所以 E 与 O 合起来恰好包含每个系数一次。

在展开式中代入 $x = 1$，得

$$E + O = 2^n.$$

代入 $x = -1$，每个偶数次幂 $(-1)^r$ 都是 $+1$，每个奇数次幂都是 -1，而由于 $n \geq 1$，左

方是 $0^n = 0$。所以

$$E - O = 0.$$

因此 $E = O$，于是 $2E = 2^n$，故

$$E = O = 2^{n-1},$$

这就是所求的结果。

第 (ii) 部分

把展开式两边对 x 求导。常数项消失，而 x^r 变成 rx^{r-1}：

$$n(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + 3\binom{n}{3}x^2 + \cdots + n\binom{n}{n}x^{n-1}.$$

现在代入 $x = 1$：

$$n2^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n},$$

正如所求。这对所有正整数 n 都成立，不论奇偶。

想一想 有没有不用微积分（calculus）也能看出第 (ii) 部分的方法?

有。由于对 $1 \le r \le n$ 有 $r\binom{n}{r} = r \cdot \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!} = n \cdot \dfrac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!} = n\binom{n-1}{r-1}$，在 $(1+x)^{n-1}$ 的展开式中代入 $x = 1$，便知这个和等于 $n\sum_{r=1}^{n}\binom{n-1}{r-1} = n \cdot 2^{n-1}$。用文字来说：从 n 个人中选出一个人数不限的委员会，再从委员会中选出一位主席，这等同于先选主席（n 种方法），再从其余 $n-1$ 个人中任选一个子集（subset）（2^{n-1} 种方法）。

最后的和

把这个和拆成两部分：

$$\sum_{r=0}^{n}(r + (-1)^r)\binom{n}{r} = \sum_{r=0}^{n} r\binom{n}{r} + \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}.$$

第一个和中 $r = 0$ 的一项是零，所以第一个和正是 (ii) 中的和，即 $n2^{n-1}$。第二个和是 $(1+x)^n$ 的展开式在 $x = -1$ 时的值，即对所有正整数 n 都有 $(1-1)^n = 0$。（这就是 (i) 中 $E - O = 0$ 的那一步；它只需要 $n \ge 1$，不需要 n 是偶数。）因此

$$\boxed{\sum_{r=0}^{n}(r + (-1)^r)\binom{n}{r} = n2^{n-1}.}$$

验算

- 当 $n = 2$：系数为 $1, 2, 1$，所以 $E = 1 + 1 = 2 = O$，而 $2^1 = 2$。(ii) 中的和是 $2 + 2 \cdot 1 = 4 = 2 \cdot 2^1$。
- 当 $n = 3$，最后的和是 $(0+1)\cdot 1 + (1-1)\cdot 3 + (2+1)\cdot 3 + (3-1)\cdot 1 = 1 + 0 + 9 + 2 = 12 = 3 \cdot 2^2$。
- 我们对 1 至 29 的每个 n 都精确地验证了全部三个恒等式；例如 $n = 6$ 给出 $192 = 6 \cdot 2^5$。

常见错误

- 忘记了 $\sum (-1)^r \binom{n}{r} = 0$ 对奇数 n 同样成立，因而以为最后的答案取决于 n 的奇偶性（parity）。它只在 $n = 0$ 时才不成立，而这里 n 是正数。
- 在 (ii) 中先代入 $x = 1$ 才求导。代入必须放在最后：一旦 x 成了一个数，就再没有甚么可以求导了。

STEP 之外

把多项式（polynomial）看成储存系数的仓库，然后通过代入、求导或相乘来提取信息，这就是*生成函数*（generating function）的想法，它是组合数学（combinatorics）和概率论中最强大的工具之一。若代入的不是 ± 1 而是复数单位根（roots of unity），便能以同样的方式抽出每隔三项或每隔四项的系数；而对概率生成函数（probability generating function）求导，就得到分布的平均值（mean），正如在这里它给出了 $\sum r \binom{n}{r}$ 一样。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率论入门）展示了生成函数的实际应用。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。