详细解答

STEP I 1989，第 4 题

纯数学 · 拉姆齐理论

STEP I 1989，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/89-s1-q4

本题在 *Beyond STEP* 第 9.2 节小型版的拉姆齐定理中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch09/ramsey.html

关键思路

先把几何放在一旁：题目对各点所设的条件，只是保证任意三点都构成一个真正的三角形，所以这纯粹是一个为连接六点的 15 条边着色的问题。按照提示，先看其中一点。它连出五条边，而颜色只有两种，所以根据鸽巢原理（pigeonhole principle），这些边之中至少有三条同色。这三条边另一端的三点之间的边，要么与最初那一点合成一个单色三角形，要么自己构成一个单色三角形。

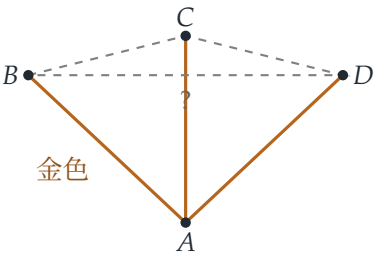
解答

六点

由于任意三点都不共线（collinear），任意三点都是一个真正的三角形的顶点，而它的三条边都在我们所画的线段之中。（任意四点不共面（coplanar）这个条件，在论证中用不着。）

考虑由 A 连出的五条线段 AB, AC, AD, AE, AF。每条线段不是金色就是银色。假如金色的最多两条，银色的也最多两条，线段总数便最多只有四条，这与事实不符。所以其中至少有三条同色。把 $B, \ldots, F$ 各点重新标记，并在有需要时把两种颜色的名称对调，我们可以假设

$$AB,\ AC,\ AD \text{ 全是金色。}$$



现在看看连接另一端三点的三条线段 BC、CD 和 DB。

> **想一想** 无论 BC、CD 和 DB 是甚么颜色，为甚么以下两种情况之中必有一种会给出单色三角形?

只有两种可能。

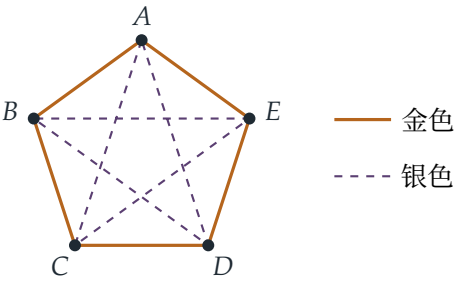
- BC, CD, DB 之中至少有一条是金色。设它是 BC（其余情况只是把字母换一换，道理相同）。那么 AB、AC 和 BC 全是金色，所以三角形 ABC 的边都是同一种颜色。
- BC, CD, DB 之中没有一条是金色。那么三条都是银色，三角形 BCD 的边都是同一种颜色。

无论哪一种情况，都有一个各边同色的三角形，这正是我们要证明的。

五点

若只有五点，每一点只连出四条边，可以分成两条一种颜色、两条另一种颜色，于是上述论证不再成立。要说明结论确实不成立，我们需要找出一种没有单色三角形的着色方法。

把 A, B, C, D, E 五点依次放在一个五边形的顶点上。把五条边 AB, BC, CD, DE, EA 涂成金色，五条对角线 AC, BD, CE, DA, EB（即五角星）涂成银色。



任何三角形都用上五点之中的三点。在五边形的任意三个顶点之中，至少有两个并不相邻（若三个顶点两两相邻，5-圈之内便要有一个三角形），所以每个三角形都有一条银色的边。此外，任意三个顶点之中也至少有两个是相邻的：假如三个顶点两两不相邻，那么

沿五边形走一圈，每两个相继的选定顶点之间都至少隔着一个未被选中的顶点，这就需要 $3+3=6$ 点。所以每个三角形也有一条金色的边。因此没有任何三角形是单色的。

> **想一想** 正五边形是平的，所以它有四个顶点共面。这不是违反了关于一般位置的规定吗？

假如各点真的在同一平面上，那确实违反了规定；但着色只取决于哪两点相连，而与各点的位置无关。把各顶点稍稍提离平面，而且各自升高不同的幅度（例如把第 k 个顶点升到高度 $0.3k^2$，其中 $k=0,1,2,3,4$）。这样便没有三点共线，也没有四点共面，而从上方看下去，图形仍然是这里所画的五边形和五角星，着色相同，也没有单色三角形。

验算

六点的边只有 $2^{15}=32768$ 种着色方法，所以可以用电脑逐一检验：每一种都有单色三角形，而且事实上总有至少两个。至于五点，把五边形着色中全部 $\binom{5}{3}=10$ 个三角形逐一检查，可以确认每个都有两种颜色。再用行列式（determinant）检验，可以确认上面升高了的五边形没有四点共面。

常见错误

- 只说“由对称性”而没有交代假设了甚么：要明确说明，你是从 A 连出的边之中选出占多数颜色的三条，并把那种颜色称为金色。
- 只证明了 A 有三条同色的边便停下来；第二步，即考察 BC、CD、DB，才是这个证明的核心。
- 处理五点时，只画一个草图而没有检查每一个三角形；像“由 A 连出的星形涂金色，其余全涂银色”这样的着色是行不通的。

STEP 之外

这是拉姆齐理论（Ramsey theory）的第一个例子：拉姆齐数（Ramsey number）$R(3,3)$ 是使得完全图（complete graph）K_n 的边的每一种双色着色都含有单色三角形的最小的 n，而本题正好证明了 $R(3,3)=6$。拉姆齐定理（Ramsey's theorem）指出，无论要求的单色完全子图有多大，这样的数都存在，但它们极难计算：就连 $R(5,5)$ 也仍然未知。Wilson 的 *Introduction to Graph Theory*（图论入门）是一本很出色的图论（graph theory）入门书，当中也讲到拉姆齐定理。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。