详细解答

STEP I 1989，第 3 题

纯数学 · 向量与纯量积

> **STEP I 1989，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q3

关键思路

以 O 为原点（origin），把一切都用两个向量（vector）$\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 表示。这样，“垂直（perpendicular）”就变成“纯量积（scalar product）为零”，而由于 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=1$，这个纯量积只取决于 x、OY 和唯一的未知量 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$。利用 $OX+OY=1$，便只剩下一条联系 x 与 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 的方程。至于上下界，则取决于 x 可以在多大的范围内变动。

解答

条件

取 O 为原点，并记 $k=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$。由于 C 位于由 A 到 B 的三分之一处，而 D 位于三分之二处，

$$\overrightarrow{OC}=\mathbf{a}+\tfrac{1}{3}(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\tfrac{1}{3}(2\mathbf{a}+\mathbf{b}),\qquad \overrightarrow{OD}=\tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+2\mathbf{b}).$$

由于 X 在 OA 上，且 $OX=x$ 及 $|\mathbf{a}|=1$，故有 $\overrightarrow{OX}=x\mathbf{a}$。同理 $\overrightarrow{OY}=y\mathbf{b}$，其中 $y=OY=1-x$。所以

$$3\overrightarrow{CY}=(3y-1)\mathbf{b}-2\mathbf{a},\qquad 3\overrightarrow{DX}=(3x-1)\mathbf{a}-2\mathbf{b}.$$

两条直线垂直，当且仅当纯量积为零。展开并利用 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=1$，得

$$\begin{aligned}9\,\overrightarrow{CY}\cdot\overrightarrow{DX}&=(3x-1)(3y-1)k-2(3y-1)-2(3x-1)+4k\\&=k[(3x-1)(3y-1)+4]-2(3x+3y-2).\end{aligned}$$

现在利用 $x+y=1$。于是 $3x+3y-2=1$，并且

$$(3x-1)(3y-1)=9xy-3(x+y)+1=9xy-2.$$

所以垂直的条件变成 $k(9xy+2)=2$。代入 $y=1-x$，即

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\frac{2}{9x(1-x)+2}}$$

（分母至少为 2，所以除以它并无问题）。

上下界

X 位于线段 OA 上，而该线段的长度为 1，所以 $0\le x\le 1$。（这时 $y=1-x$ 也在 $[0,1]$ 之内，所以 Y 自然在 OB 上。）在这个区间上

$$x(1-x)=\tfrac{1}{4}-(x-\tfrac{1}{2})^2,$$

所以 $0\le x(1-x)\le\frac{1}{4}$，其中极大值在 $x=\frac{1}{2}$ 取得，极小值在 $x=0$ 或 1 取得。因此

$$2\le 9x(1-x)+2\le\tfrac{9}{4}+2=\tfrac{17}{4}.$$

取倒数会把不等式（inequality）的方向倒转（各项皆为正数），再乘以 2 便得

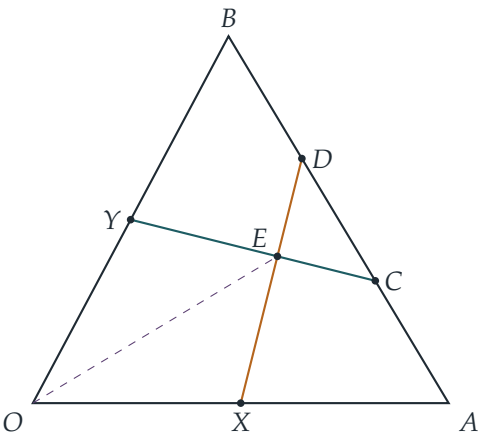
$$\frac{8}{17}\le\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\le 1,$$

正如所求。（取值 1 需要 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$，这并不构成真正的三角形，所以实际上 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}<1$；题目所述的不等式仍然成立。）

最大的角与 OE

想一想 为甚么最大的角对应的是 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 的最小值?

由于 $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=1$，$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\cos A\hat{O}B$，而余弦在 $[0,\pi]$ 上是递减的。所以当 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\frac{8}{17}$ 时，即当 $x=\frac{1}{2}$（因而 $y=\frac{1}{2}$）时，这个角最大。这时 X 和 Y 分别是 OA 和 OB 的中点，而这个角为 $\arccos\frac{8}{17}\approx 61.9°$。



现在，把 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 对调，整个图形是对称的：这样对调会交换 $A \leftrightarrow B$、$C \leftrightarrow D$ 和 $X \leftrightarrow Y$，因而交换直线 CY 和 DX。所以它们的交点 E 在对调之下保持不变，亦即它位于对称轴（line of symmetry）上：对某个 t 有 $\overrightarrow{OE} = t(\mathbf{a}+\mathbf{b})$。

DX 上的一般点为

$$\overrightarrow{OX} + s\,\overrightarrow{XD} = \tfrac{1}{2}\mathbf{a} + s(\tfrac{1}{3}\mathbf{a} + \tfrac{2}{3}\mathbf{b} - \tfrac{1}{2}\mathbf{a}) = (\tfrac{1}{2} - \tfrac{s}{6})\mathbf{a} + \tfrac{2s}{3}\mathbf{b}.$$

由于 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 不平行，我们可以比较系数：当 $\frac{1}{2} - \frac{s}{6} = \frac{2s}{3}$ 时，这是 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 的倍数，由此得 $s = \frac{3}{5}$ 及 $t = \frac{2}{5}$。所以 $\overrightarrow{OE} = \frac{2}{5}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$。最后

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = 2 + \tfrac{16}{17} = \tfrac{50}{17},$$

所以

$$OE = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{50}{17}} = \frac{2}{5}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{17}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}} = \boxed{\frac{2\sqrt{34}}{17}} \approx 0.686.$$

验算

- 用坐标表示，取 $\mathbf{a} = (1,0)$ 及 $\mathbf{b} = (\frac{8}{17}, \frac{15}{17})$。于是 $X = (\frac{1}{2}, 0)$，$D = (\frac{11}{17}, \frac{10}{17})$，所以 $\overrightarrow{XD} = (\frac{5}{34}, \frac{10}{17})$。另外 $Y = (\frac{4}{17}, \frac{15}{34})$ 及 $C = (\frac{14}{17}, \frac{5}{17})$，所以 $\overrightarrow{CY} = (-\frac{10}{17}, \frac{5}{34})$。它们的纯量积为 $-\frac{50}{578} + \frac{50}{578} = 0$，正如所料。
- $E = \frac{2}{5}(\frac{25}{17}, \frac{15}{17}) = (\frac{10}{17}, \frac{6}{17})$，而 $|OE| = \frac{\sqrt{136}}{17} = \frac{2\sqrt{34}}{17} \approx 0.6860$。这与直接以数值方法求两条直线交点所得的结果吻合。
- $s = \frac{3}{5}$ 这个值在 $[0,1]$ 之内，所以 E 确实位于 X 与 D 之间，在三角形之内。

常见错误

- 忘记了 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 1$（以致在条件中留下 $|\mathbf{a}|^2$ 的项），或者把两个三等分点（trisection points）的位置调转了。
- 以为最大的角对应最大的 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$：角愈大，余弦愈小。
- 写成 $\overrightarrow{OX} = x$ 而不是 $x\mathbf{a}$。点 X 是以向量表示的；x 只是它的长度。

STEP 之外

这里的方法，是把每一点写成两个基向量（basis vectors）的组合，并把几何问题化为纯量积；这正是学习内积（inner product）和格拉姆矩阵（Gram matrix）的起点。一组向量的构形，在不计旋转的意义下，完全由它的纯量积表决定，而在这里该表只有 1、1 和

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$。这就是整道题目可以归结为一个数的原因。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）对这些想法有详细的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。