详细解答

STEP I 1989，第 2 题

纯数学 · 黎曼和与极限

> **STEP I 1989，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q2

关键思路

这个古怪的式子，其实只是一些长方形面积之和的伪装。如果直接写出 n 个长方形的总面积，会得到一个含有 $k\ln k$ 的和；那些阶乘（factorial）的对数，不过是把同一个和重新分组而已。只要把两者对上，极限（limit）就是那个积分，而第一部分正好让我们把它算出来。

解答

不定积分

用分部积分法（integration by parts），取 $u=\ln x$ 和 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=x$，于是 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}$ 而 $v=\frac{1}{2}x^2$，

$$\begin{aligned}\int x\ln x\,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}x^2\ln x-\int \tfrac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \tfrac{1}{2}x^2\ln x-\tfrac{1}{4}x^2+C.\end{aligned}$$

积分的值

由于 $\ln(1/x)=-\ln x$，被积函数（integrand）是 $-x\ln x$。被积函数在 $x=0$ 处没有定义，所以我们先在 $[\varepsilon,1]$ 上积分，再令 $\varepsilon\to 0^+$：

$$\int_{\varepsilon}^{1} x\ln(1/x)\,\mathrm{d}x=\left[\tfrac{1}{4}x^2-\tfrac{1}{2}x^2\ln x\right]_{\varepsilon}^{1}=\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}\varepsilon^2+\tfrac{1}{2}\varepsilon\,(\varepsilon\ln\varepsilon).$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\varepsilon^2\to 0$ 且 $\varepsilon\ln\varepsilon\to 0$（即题目给出的事实），所以

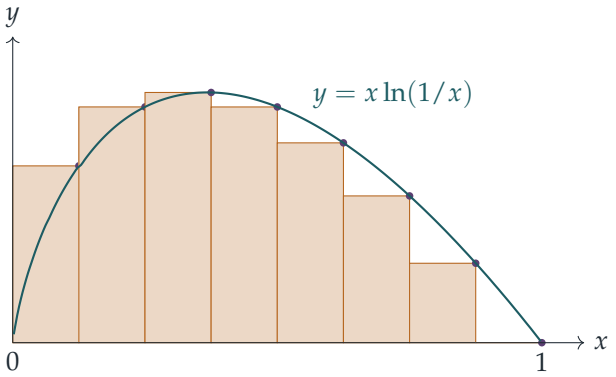
$$\int_{0}^{1} x\ln(1/x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$$

同一个事实也说明，当 $x \to 0^+$ 时 $f(x) = x\ln(1/x)$ 趋向 0，所以只要定义 $f(0) = 0$，f 就在整个 $[0,1]$ 上连续（continuous）。曲线由 0 上升，在 $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ 处（该处 $f'(x) = -\ln x - 1 = 0$）达到极大值 $\frac{1}{\mathrm{e}}$，然后在 $x = 1$ 处回落到 0。

长方形

把 $[0,1]$ 分成 n 条阔度为 $\frac{1}{n}$ 的长条。第 k 条是 $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$，其上的长方形的右上角落在曲线上，所以它的高是

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k}{n}\ln\frac{n}{k} = \frac{k}{n}(\ln n - \ln k).$$



因此，这些长方形的总面积是

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}(\ln n - \ln k) &= \frac{\ln n}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ln k \\ &= \frac{\ln n}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ln k \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln n - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ln k. \end{aligned}$$

第一项已经与我们想要的式子吻合。

想一想 那些阶乘是从哪里来的？

对于 $0 \le m \le n-1$，

$$\ln\frac{n!}{m!} = \ln((m+1)(m+2)\cdots n) = \sum_{k=m+1}^{n} \ln k.$$

现在把 $m = 0, 1, \ldots, n-1$ 的这些式子加起来，并数一数每个 $\ln k$ 出现了多少次。$\ln k$ 这一项恰好在 $m+1 \le k$ 时出现，即 $m = 0, 1, \ldots, k-1$ 的时候：一共 k 次。因此

$$\ln\frac{n!}{0!} + \ln\frac{n!}{1!} + \cdots + \ln\frac{n!}{(n-1)!} = \sum_{k=1}^{n} k\ln k.$$

（例如取 $n=3$：$\ln 6+\ln 6+\ln 3=\ln 1+2\ln 2+3\ln 3$，两边都等于 $\ln 108$。）所以题目中的式子正正就是 S_n，即 n 个长方形的面积。

极限

当 $n\to\infty$ 时，长方形与曲线贴合得越来越紧密，而由于 f 在 $[0,1]$ 上连续，长方形的总面积趋向曲线下的面积。因此

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln n-\frac{1}{n^2}\left[\ln\frac{n!}{0!}+\ln\frac{n!}{1!}+\cdots+\ln\frac{n!}{(n-1)!}\right]=S_n\to\int_0^1 x\ln(1/x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4},$$

这正是所要证明的结果。

如果你想要比“长方形贴合得越来越紧密”更扎实的说法，这里有一个上界。在每一条长条上，长方形的面积与曲线下的面积相差至多为 $\frac{1}{n}$ 乘以 f 在该长条上的变化幅度。把所有长条上的变化幅度加起来：f 上升了 $\frac{1}{\mathrm{e}}$，又回落了 $\frac{1}{\mathrm{e}}$，所以总和至多为 $\frac{2}{\mathrm{e}}$。因此 $|S_n-\frac{1}{4}|\le\frac{2}{\mathrm{e}n}\to 0$。

验算

- 对第一部分的答案求导：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2\right)=x\ln x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x=x\ln x$。
- 取 $n=2$ 时，式子的值是 $\frac{3}{4}\ln 2-\frac{1}{4}(\ln 2+\ln 2)=\frac{1}{4}\ln 2\approx 0.173$，这正是两个长方形的面积 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\cdot 0$。
- 数值上，式子的值在 $n=10$ 时约为 0.24559，在 $n=100$ 时约为 0.249937，在 $n=1000$ 时约为 0.2499992，逐步逼近 $\frac{1}{4}$。

常见错误

- 弄丢正负号：被积函数是 $x\ln(1/x)=-x\ln x$，所以第一部分求得的原函数（antiderivative）必须取负，面积是 $+\frac{1}{4}$，而不是 $-\frac{1}{4}$。
- 把 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 误写成 $\sum k=\frac{1}{2}n^2$：这样括号内的 $\frac{1}{n}$ 就会不见了。
- 忘记这个积分在 0 处是瑕积分（improper integral）：处理下限时需要用到 $x\ln x\to 0$ 这个事实，而题目已经给出。

STEP 之外

这个长方形面积之和是一个黎曼和（Riemann sum）；对于闭区间上的每一个连续函数，黎曼和都收敛到积分，这是大学分析课程中最早遇到的重要定理之一。我们所用的上界，

考虑的是 f 升降的总幅度，这正是*有界变差*（bounded variation）函数的想法。反过来看，这道题也提供了关于 $\sum k \ln k$ 的信息；这个量与超阶乘（hyperfactorial）$1^1 2^2 \cdots n^n$ 密切相关，而后者的增长速度可以用类似 $n!$ 的斯特灵公式（Stirling's formula）的思路更精确地求出。Abbott 的 *Understanding Analysis* 仔细地建立了黎曼积分的理论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。