详细解答

STEP I 1989，第 16 题

概率与统计 · 零和博弈

STEP I 1989，第 16 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/89-s1-q16

本题在 *Beyond STEP* 第 12.14 节混合策略中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/mixed-strategies.html

关键思路

一切都源自一个小小的表：九对猜测各自对应的 B 的赢款。只要把这个表写下来，每个期望值（expected value）都不过是表中各项的加权和。至于最后一部分，把总和按 A 的概率 a_j 分组，“无论 A 怎样做”便化为对三个系数的条件，而要令三者皆为非负，只需解一个小型的线性不等式组。

解答

设 $w(i,j)$ 为在 A 猜 i、B 猜 j 的一局中 B 的赢款（以英镑计）。按规则逐一读出：

- 若 $|i-j|=2$，说 1 的一方付给说 3 的一方两英镑，故 $w(1,3)=2$ 及 $w(3,1)=-2$；
- 若 $|i-j|=1$，说较大数字的一方付出一英镑，故 $w(2,1)=w(3,2)=1$ 及 $w(1,2)=w(2,3)=-1$；
- $w(i,i)=0$。

	B 说 1	B 说 2	B 说 3
A 说 1	0	-1	2
A 说 2	1	0	-1
A 说 3	-2	1	0

留意 $w(j,i) = -w(i,j)$：规则对两名玩家一视同仁，所以把两人的猜测对调，付款的一方也随之对调。

第 (i) 部分

若 A 总是说 N，B 应沿着表的第 N 行看，并总是选取最大的一项。

- $N = 1$：B 总是说 3，每局赢 £2。
- $N = 2$：B 总是说 1，每局赢 £1。
- $N = 3$：B 总是说 2，每局赢 £1。

在每种情况下，这个选择都是唯一的最佳选择，其他任何回应不是一无所获，就是输钱。

第 (ii) 部分

在任何一局中，A 的猜测与 B 的猜测互相独立（independent）（A 自行随机选取，而 B 则暗中决定），所以 A 说 i 而 B 说 j 的概率是 $\frac{1}{3}b_j$。因此 B 的期望赢款是

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(W) &= \sum_{j=1}^{3} b_j \cdot \tfrac{1}{3}\big(w(1,j) + w(2,j) + w(3,j)\big) \\ &= \tfrac{1}{3}\big(b_1(0+1-2) + b_2(-1+0+1) + b_3(2-1+0)\big) \\ &= \tfrac{1}{3}\,(b_3 - b_1).\end{aligned}$$

由于 $b_3 \le 1$ 及 $b_1 \ge 0$,此值至多为 $\frac{1}{3}$,而等号恰好在 $b_3 = 1$ 时成立(这时必有 $b_1 = b_2 = 0$)。所以 B 应该总是猜 3，这样每局的期望赢款是 £$\frac{1}{3}$。面对均匀随机选取的 A，猜 3 会赢 £2、输 £1 或打和，概率各为 $\frac{1}{3}$。

第 (iii) 部分

设 A 以概率 a_i 猜 i，B 以概率 b_j 猜 j，两者独立，则

$$\mathrm{E}(W) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_i b_j\, w(i,j).$$

按每个 a_i 合并各项（每次取表中的一行）：

$$\mathrm{E}(W) = \underbrace{(2b_3 - b_2)}_{X}\, a_1 + \underbrace{(b_1 - b_3)}_{Y}\, a_2 + \underbrace{(b_2 - 2b_1)}_{Z}\, a_3.$$

我们希望 $X \ge 0$、$Y \ge 0$ 及 $Z \ge 0$，即

$$b_2 \le 2b_3, \qquad b_3 \le b_1, \qquad 2b_1 \le b_2.$$

把这些不等式串连起来，得 $b_2 \le 2b_3 \le 2b_1 \le b_2$，所以全部都必须是等式：$b_3 = b_1$ 及 $b_2 = 2b_1$。连同 $b_1 + b_2 + b_3 = 1$，便得

$$b_1 = \tfrac{1}{4}, \qquad b_2 = \tfrac{1}{2}, \qquad b_3 = \tfrac{1}{4},$$

这时 $X = Y = Z = 0$，当然都是非负的。所以这样的选择确实存在（而且事实上是唯一的一个）。

想一想 B 能否做得更好，令 X、Y 和 Z 全部严格为正?

不能。对任何 b_j，

$$b_1X + b_2Y + b_3Z = b_1(2b_3 - b_2) + b_2(b_1 - b_3) + b_3(b_2 - 2b_1) = 0,$$

这不过是说，B 与另一个自己对赛时不赚不蚀（这个表是反对称（antisymmetric）的）。以总和为 1 的非负权重对 X, Y, Z 取加权和，若三者皆为正数，结果不可能是零。这就是为甚么上面的不等式只能以等号成立。

现在来作出推论。取 $b = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$，则对任何 a_1, a_2, a_3 的选择，都有

$$\mathrm{E}(W) = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 = 0$$

；更一般地，只要 $X, Y, Z \ge 0$，便有 $\mathrm{E}(W) = Xa_1 + Ya_2 + Za_3 \ge 0$，因为每个 $a_i \ge 0$。B 在不同局的赢款是独立同分布（independent and identically distributed）的（两名玩家的猜测在各局之间互相独立），每局的平均值至少为 0。根据大数定律（law of large numbers），经过许多局之后，B 每局的平均赢款会趋向这个平均值，所以长远而言，无论 A 怎样做，B 都不会输钱。 □

验算

- 第 (ii) 部分是第 (iii) 部分在 $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{3}$ 时的特殊情况：$\frac{1}{3}(X + Y + Z) = \frac{1}{3}(b_3 - b_1)$，与之前所得相符。
- 第 (i) 部分是 a 把全部权重放在 N 上的情况：当 $N = 1$ 时，$\mathrm{E}(W) = X = 2b_3 - b_2$，在 $b_3 = 1$ 时取得最大值，即 2。
- 模拟 2×10^5 局，B 采用 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$，A 采用 $(0.6, 0.1, 0.3)$，所得的平均赢款约为每局 -0.004，与 0 吻合。

常见错误

- 把正负号的规定弄反：相差 1 时，付款的是猜较大数字的一方，但相差 2 时，付款的却是猜较小数字的一方。应先把表列出，再检查它是否反对称。

- 从第 (ii) 部分推断 B 应该混合不同的猜测。面对一个固定的混合策略（mixed strategy），最佳回应总是一个纯策略（pure strategy）（这里是总是猜 3）；只有当 B 必须防范 A 的每一个策略时，混合才有好处，正如第 (iii) 部分那样。

STEP 之外

这是一个二人零和博弈（two-player zero-sum game），而第 (iii) 部分是冯·诺伊曼（von Neumann）极小极大定理（minimax theorem）的一个小型例子：B 有一个混合策略，无论 A 怎样做，都能保证他至少取得博弈的值；又因为这个博弈是对称的，所以该值为 0。寻找这样的策略是一个线性规划（linear programming）问题，它把概率与最优化及经济学连系起来。概率方面，可参阅 Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（概率入门教材）；至于博弈本身，Binmore 的 *Playing for Real*（博弈论入门读物）是很好的入门书。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。