详细解答

STEP I 1989，第 13 题

力学 • 涉及摩擦力的梯子平衡

STEP I 1989，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

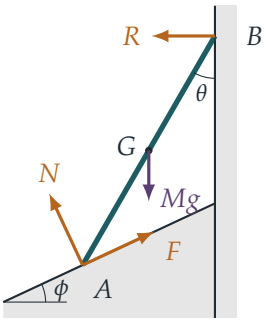
step.maths.org/questions/89-s1-q13

关键思路

这是一道三个力再加摩擦力的平衡（equilibrium）问题，窍门在于选对方向。以梯脚为支点取力矩（moments），可同时消去 N 和 F，立刻得出墙的反作用力。接着，我们不沿水平和铅垂方向分解，而是*沿垂直于斜面和平行于斜面的方向*分解。这样得出的两条方程各自只含未知量 N 和 F 的其中一个，题目给出的公式便直接得出。

解答

我们把梯子模型化为一根长度为 $2a$ 的均匀杆（uniform rod）AB，其质心（centre of mass）G 位于中点。梯脚 A 置于粗糙斜面上，梯顶 B 靠在光滑的墙上，因此墙的反作用力 R 沿水平方向，指向远离墙的一方。在 A 点有垂直于斜面的法向反作用力（normal reaction）N 和沿斜面的摩擦力（friction）F。梯子若要滑动，梯脚会沿斜面向下滑，远离墙壁，所以我们取 F 的方向为沿斜面向上、指向墙壁。（稍后求得的 F 的公式为正数，印证了这个选择。）



墙的反作用力

以 A 为支点取力矩，可消去 N 和 F。梯子与铅垂线的夹角为 θ，所以 B 比 A 高 $2a\cos\theta$，而 G 与 A 的水平距离为 $a\sin\theta$。作用于 B 的水平力 R 的力矩为 $R\cdot 2a\cos\theta$，重量的力矩为 $Mg\cdot a\sin\theta$，转向相反，因此

$$2aR\cos\theta = Mga\sin\theta \qquad \Longrightarrow \qquad R = \tfrac{1}{2}Mg\tan\theta.$$

沿垂直于斜面和平行于斜面的方向分解

> **想一想** 应该沿哪些方向分解，才能令每条方程只含一个未知量?

沿垂直于斜面的方向和沿斜面的方向分解（resolve）。F 在垂直于斜面的方向没有分量，N 在沿斜面的方向没有分量。我们需要求出另外两个力的分量。

- 重量 Mg 有压向斜面的分量 $Mg\cos\phi$ 和沿斜面向下的分量 $Mg\sin\phi$。
- 斜面向着墙壁上升，所以它向上的法线朝远离墙的一方倾斜，而水平力 R（同样指向远离墙的一方）沿该法线的分量为 $R\sin\phi$，即指向斜面之外。沿斜面方向，R 指向远离墙的一方，亦即下坡方向，分量为 $R\cos\phi$。

垂直于斜面：

$$N + R\sin\phi = Mg\cos\phi,$$
$$\text{所以}\quad N = Mg\cos\phi - \tfrac{1}{2}Mg\tan\theta\sin\phi = Mg\left(\cos\phi - \frac{\tan\theta\sin\phi}{2}\right).$$

沿斜面（以沿斜面向上为正）：

$$F = Mg\sin\phi + R\cos\phi \quad \Longrightarrow \quad F = Mg\left(\sin\phi + \frac{\tan\theta\cos\phi}{2}\right).$$

这就是题目要求的两个结果。

最大的角

梯脚不滑动的条件是：接触得以维持，即 $N>0$；以及摩擦力不超过其上限，即 $F\le\mu N$，其中 $\mu = 2$。（这里 $F>0$，所以这是唯一的摩擦条件。）当 $\phi = 45^\circ$ 时，$\sin\phi = \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$，记 $t = \tan\theta$，则

$$F = \frac{Mg}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{t}{2}\right), \qquad N = \frac{Mg}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{t}{2}\right).$$

所以 $N>0$ 要求 $t<2$，而 $F\le 2N$ 则变成

$$1+\frac{t}{2} \le 2-t \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{3t}{2}\le 1 \quad\Longleftrightarrow\quad \tan\theta \le \frac{2}{3}.$$

这比 $t < 2$ 更严格，所以它才是真正起限制作用的条件。由于 $\tan\theta$ 在 $0 < \theta < 90^\circ$ 上递增，梯子能够保持平衡的最大角为

$$\theta = \arctan\tfrac{2}{3} \approx 33.7^\circ,$$

而在这个角度下，摩擦力达到极限值（limiting friction）。

验算

- 当 $\phi = 0$（水平地面）时，公式给出 $N = Mg$ 和 $F = \frac{1}{2}Mg\tan\theta = R$，正是梯子置于水平地面时为人熟悉的结果。
- 当 $\theta = 0$（梯子铅垂）时，墙不起任何作用，而 $N = Mg\cos\phi$，$F = Mg\sin\phi$，与质点静止于斜面上的情况完全一样。
- 数值上，对随机选取的 θ 和 ϕ 直接解水平和铅垂方向的力方程，所得结果与两条公式吻合，误差在 10^{-13} 以内；而当 $\phi = 45^\circ$ 时，比值 F/N 在 $\theta = 33.690^\circ$ 处刚好越过 2。

常见错误

- 弄错 $R\sin\phi$ 一项的正负号。由于斜面向着墙壁上升，R 有一部分把梯脚拉离斜面，令 N 减小。
- 沿水平和铅垂方向分解，然后在解所得的联立方程时出错。这个做法行得通，但沿斜面和垂直于斜面的方向分解要快得多。

STEP 之外

留意斜面越陡，梯子可以倾斜的程度就越小，因为墙的反作用力一方面令 N 减小，另一方面又令 F 增大。这类问题是静力学（statics）的起点：我们选择合适的坐标轴和取矩点，把各个未知量分离开来。同样的想法也是分析桁架（trusses）和框架结构（frameworks）的基础，更广泛而言也是分析稳定性的基础。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）对刚体平衡和摩擦有严谨细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。