详细解答

STEP I 1989，第 12 题

力学 · 弹性绳与能量

> **STEP I 1989，第 12 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q12

关键思路

一切都建基于正四面体（regular tetrahedron）的几何：它的质心（centre of mass）与顶点、与面、以及与通过顶点的轴之间的距离各是多少。一旦求得这三个长度，第一部分只不过是虎克定律（Hooke's law）的应用。至于第二部分，对称性确保运动是纯粹的铅垂平移。四面体开始和结束时都处于静止，所以我们根本不需要运动方程（equation of motion）：只要考虑重力势能与弹性势能（elastic potential energy）之间的能量平衡，便可解决问题。

解答

四面体的几何

我们把各杆视为均匀刚杆，把各弦线视为符合虎克定律的轻弹性弦线。每根杆的质量可视为集中在其中点。每个顶点恰好属于六根杆中的三根，所以六个中点的平均等于四个顶点的平均。因此质心 G 就是四面体的形心（centroid）。

面 BCD 是边长为 $2a$ 的等边三角形，所以它的中心 N 与 B、C、D 每一点的距离都是

$$\rho = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

。四面体的高是 $AN = \sqrt{(2a)^2 - \rho^2} = \sqrt{\frac{8}{3}}\,a = \frac{2\sqrt{6}}{3}a$。形心位于 AN 上，在由该面往上四分之一的位置。所以

$$GN = r = \frac{\sqrt{6}}{6}\,a, \qquad GA = GB = GC = GD = R = \frac{\sqrt{6}}{2}\,a.$$

（验算：$R^2 = \rho^2 + r^2 = \frac{4}{3}a^2 + \frac{1}{6}a^2 = \frac{3}{2}a^2$。）

张力

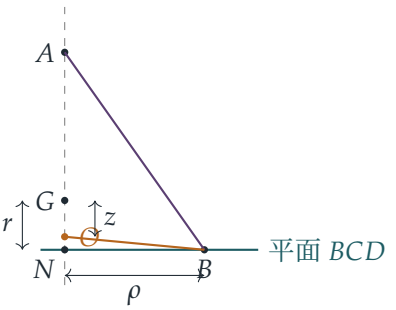
当 X 位于 G 时，每条弦线的长度为 $R = \frac{\sqrt{6}}{2}a$，伸长量（extension）为 $R - a = \frac{\sqrt{6}-2}{2}a > 0$，所以四条弦线全部拉紧。根据虎克定律，每条弦线的张力（tension）为

$$T = \frac{\lambda(R-a)}{a} = \frac{\sqrt{6}-2}{2}\lambda \approx 0.225\,\lambda.$$

XA 断裂之后

断裂之前，四个相等的张力沿着指向 G 的四个方向拉动各顶点。由于 G 是形心，由 G 指向各顶点的单位向量之和为零，所以各弦线不产生净力，桌面承受全部重量 Mg。

当 XA 断裂时，余下三条弦线的合力大小为 T，方向铅垂向上，即等于 XA 原有拉力的负值。在水平方向上，由于绕铅垂线 AN 有三重对称性，三个拉力互相抵销。每个拉力都位于通过该线的铅垂平面内，所以它们不产生扭转力偶（couple），而它们的倾侧力偶亦因对称而互相抵销。因此四面体的运动是纯粹的铅垂平移，AN 始终留在通过 O 的铅垂线上。它之所以离开桌面，是因为 $T > Mg$，这一点我们会在最后确认。



设 z 为 G 高于 O 的高度。那么 B 与通过 O 的铅垂线的水平距离为 ρ，相对于 O 的高度为 $z - r$，所以三条弦线每条的长度都是

$$L(z) = \sqrt{\rho^2 + (z-r)^2}.$$

开始时 $z = 0$，而 $L = \sqrt{\rho^2 + r^2} = R$。在最高点，$BCD$ 与 O 同高，所以 $z = r$，而 $L = \rho = \frac{2}{\sqrt{3}}a$。当 $0 \le z \le r$ 时，L 一直介乎 ρ 与 R 之间，两者都大于 a，所以弦线自始至终保持拉紧。

想一想 怎样才可以不必解一条棘手的非线性运动方程，而求出最大高度？

桌面光滑，弦线为轻弦线，所以机械能（mechanical energy）守恒。由于四面体立即离开桌面，法向反作用力（normal reaction）不作功。四面体在开始时和在最高点时都处于静止，所以动能不必考虑。三条弦线所失去的弹性能量 $3 \cdot \frac{\lambda(L-a)^2}{2a}$，必定等于所获得的

重力势能 Mgr：

$$Mg\,r = \frac{3\lambda}{2a}\Big[(R-a)^2-(\rho-a)^2\Big].$$

把方括号内的式子因式分解，并利用 $R^2-\rho^2 = \frac{3}{2}a^2-\frac{4}{3}a^2 = \frac{1}{6}a^2$，

$$\begin{aligned}(R-a)^2-(\rho-a)^2 &= R^2-\rho^2-2a(R-\rho)\\ &= a^2\Big(\tfrac{1}{6}-\sqrt{6}+\tfrac{4}{\sqrt{3}}\Big).\end{aligned}$$

由于 $\dfrac{3}{2ar} = \dfrac{3}{2a}\cdot\dfrac{6}{\sqrt{6}\,a} = \dfrac{3\sqrt{6}}{2a^2}$，由此可得

$$\begin{aligned}\frac{Mg}{\lambda} &= \frac{3\sqrt{6}}{2}\Big(\tfrac{1}{6}-\sqrt{6}+\tfrac{4}{\sqrt{3}}\Big) = \frac{\sqrt{6}}{4}-9+6\sqrt{2}\\ &\approx 0.6124-9+8.4853 = 0.0977,\end{aligned}$$

准确至 2 位有效数字即为 0.098，正如题目所求。

最后，$Mg \approx 0.098\lambda < 0.225\lambda \approx T$，所以刚断裂后的向上净力 $T-Mg$ 为正数，四面体确实会升离桌面，与题目所述一致。

验算

- 取 $a=1$，我们以坐标表示四个顶点，确认全部六条棱的长度都是 2，四个顶点与形心的距离都是 $\frac{\sqrt{6}}{2}\approx 1.2247$，并重新得出 $T\approx 0.2247\lambda$。
- 取 $Mg/\lambda = 6\sqrt{2}+\frac{\sqrt{6}}{4}-9 \approx 0.09765$，我们由 $z=0$ 处的静止状态出发，以数值方法逐步计算运动方程 $M\ddot{z} = 3T(L)\,\frac{r-z}{L} - Mg$。速度首次回到零时 $z\approx 0.40825$，与 $r=\frac{\sqrt{6}}{6}$ 吻合。

常见错误

- 把 R 当作形心到面的距离。形心位于由顶点往下 $\frac{3}{4}$ 的位置，所以 $R=3r$。
- 忘记弦线在最高点时仍然处于拉伸状态。每条弦线在该处的能量是 $\frac{\lambda(\rho-a)^2}{2a}$，而不是零。
- 计算伸长量 $L-a$ 时，把 L 取作由 O 到面的中心 N 的距离，而不是由 O 到顶点的距离。

STEP 之外

这里所用的形心技巧（六根杆的中点的平均等于四个顶点的平均）是以下一般事实的一个小例子：一个系统的质心，是其各部分质心按质量加权的平均。把运动视为纯粹平移，靠的是对称性论证；这类论证在刚体动力学（rigid-body dynamics）中会变得有系统，因为物体的运动可分解为质心的平移和绕质心的转动。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）对这两个想法都有细致的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。