详细解答

STEP I 1989，第 11 题

力学 • 抛体射程的最优化

STEP I 1989，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/89-s1-q11

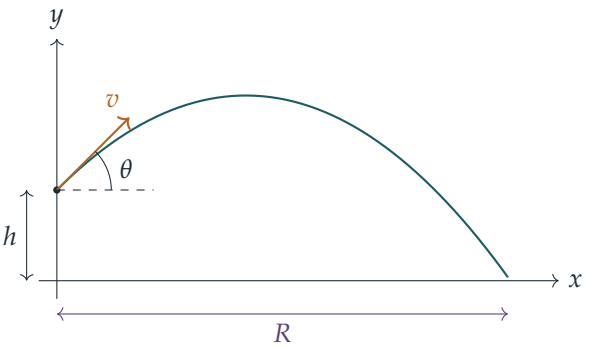
关键思路

飞行时间来自一条关于 t 的二次方程（quadratic equation）：铅球的高度回到零时便落地。取正根，再乘以水平速率，便得到 R；余下的工作只是把平方根整理成题目要求的形式。至于第二部分，“θ 稍为减小，R 会否增大?”其实是问 $\mathrm{d}R/\mathrm{d}\theta$ 在 $\theta = 45^\circ$ 时的正负号，而对称关系 $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$ 令这个导数（derivative）化简得十分俐落。

解答

模型

我们把铅球视为只受重力作用的质点（particle），从点 $(0, h)$ 以速率 v、与水平成仰角 θ 掷出，其中 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 及 $h > 0$。取 x 轴为水平方向并指向投掷的方向，y 轴由地面起竖直向上。



射程

经过时间 t 后，

$$x = vt\cos\theta, \qquad y = h + vt\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

铅球在 $y = 0$ 时着地，即

$$\tfrac{1}{2}gt^2 - (v\sin\theta)\,t - h = 0 \quad\Longrightarrow\quad t = \frac{v\sin\theta \pm \sqrt{v^2\sin^2\theta + 2gh}}{g}.$$

由于 $h > 0$，两根之积 $-2h/g$ 为负数，所以恰好有一个根是正数；取负号得到的是负根（即掷出之前的时刻），因此我们取正号。于是

$$\begin{aligned} R = v\cos\theta\, t &= \frac{v\cos\theta}{g}\left(v\sin\theta + \sqrt{v^2\sin^2\theta + 2gh}\right) \\ &= \frac{v^2\sin\theta\cos\theta}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v^2\sin^2\theta}}\right) \qquad (\text{提出 } v\sin\theta > 0) \\ &= \frac{v^2}{2g}\sin 2\theta\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2hg}{v^2\sin^2\theta}}\right), \end{aligned}$$

其中用到 $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$。这就是所要求的结果。

> **想一想** 为甚么可以把 $v\sin\theta$ 以 $v^2\sin^2\theta$ 的形式放进平方根之内?

因为 $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$ 只在 $a \geq 0$ 时成立。这里 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，所以 $v\sin\theta > 0$，这一步是成立的。（若是向下掷出，这一步便不成立，题目所给的公式也会出错。）

45° 是最佳角度吗?

求导时，用未化简的形式较为方便。写成

$$R(\theta) = \frac{v}{g}\cos\theta\,(v\sin\theta + S), \qquad S = \sqrt{v^2\sin^2\theta + 2gh},$$

于是 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{v^2\sin\theta\cos\theta}{S}$。由积法则（product rule），

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta} = \frac{v}{g}\left[-\sin\theta\,(v\sin\theta + S) + \cos\theta\left(v\cos\theta + \frac{v^2\sin\theta\cos\theta}{S}\right)\right].$$

在 $\theta = 45^\circ$ 时，设 $\sin\theta = \cos\theta = c = \frac{1}{\sqrt{2}}$。$-vc^2$ 与 $+vc^2$ 两项互相抵销，余下

$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=45^\circ} &= \frac{vc}{g}\left(-S + \frac{v^2c^2}{S}\right) = \frac{vc}{gS}\left(v^2c^2 - S^2\right) \\ &= \frac{vc}{gS}\left(\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v^2 - 2gh\right) = -\frac{2vhc}{S} = -\frac{\sqrt{2}\,vh}{\sqrt{v^2 + 4gh}}, \end{aligned}$$

其中最后一步用到 $S = \sqrt{\frac{1}{2}v^2 + 2gh} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{v^2 + 4gh}$。

由于 $v > 0$ 及 $h > 0$，这个导数严格为负。所以在 $45°$ 附近，R 是 θ 的严格递减函数（strictly decreasing function），而当减幅 $\delta\theta > 0$ 足够小时，便有 $R(45° - \delta\theta) \approx R(45°) + \frac{\sqrt{2}\,vh}{\sqrt{v^2+4gh}}\,\delta\theta > R(45°)$。**答案是会的：$\theta$ 稍为减小，R 便会增大。**

从物理角度看：铅球从高处掷出，留在空中的时间比在平地上掷出时稍长，而这段额外的时间用来作水平移动更为划算，所以掷得平一点会有好处。只有当 $h = 0$ 时，导数才等于零，$45°$ 才是最佳角度。

验算

- 当 $h = 0$ 时，公式给出 $R = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta$，即熟悉的平地射程，而在 $45°$ 的导数为 0，正如所料。
- 单位：v^2/g 是长度，而 $2hg/v^2$ 是无量纲（dimensionless）的量。
- 数值上，取 $g = 9.8$、$v = 13\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ 及 $h = 2\,\mathrm{m}$：$R(45°) \approx 19.05\,\mathrm{m}$，但 $R(40°) \approx 19.10\,\mathrm{m}$。把运动按时间逐步推算，所得结果与 R 的公式吻合；而对许多随机选取的 v 和 h，在 $45°$ 以有限差分（finite difference）计算的导数亦与 $-\sqrt{2}\,vh/\sqrt{v^2+4gh}$ 相符。

常见错误

- 解 t 的二次方程时取错了根，或忘记说明为何舍去负根。
- 推论说“$\sin 2\theta$ 在 $45°$ 时最大，所以 R 也是”。括号内的式子同样取决于 θ（它随 θ 增大而减小），所以这个论证并不完整。

STEP 之外

一般地令 $\mathrm{d}R/\mathrm{d}\theta = 0$，可证明从高度 h 掷出的最佳角度满足 $\tan\theta = v/\sqrt{v^2 + 2gh}$，这个角度略小于 $45°$（以上述数值计算约为 $42°$）；现实中的铅球运动员出手角度还要更低，因为角度较平时他们可以推得更用力。像这样对一族轨迹求最优，便会引出这族曲线的*包络线*（envelope），即“安全抛物线”（parabola of safety），它划出了铅球所能到达的每一点。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教材）对抛体运动（projectile motion）及其各种变化有细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。