详细解答

STEP I 1989，第 10 题

力学 • 与速度相关的阻力

> **STEP I 1989，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q10

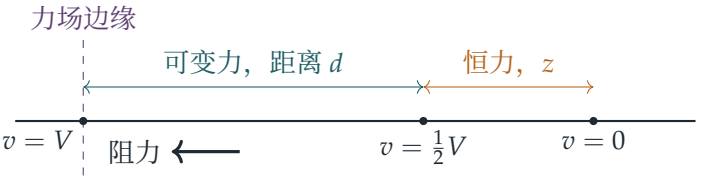
关键思路

阻力取决于速率 v，而非时间，而我们要求的是距离。这正是提示我们把加速度（acceleration）写成 $v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 的信号：这样一来，牛顿第二定律（Newton's second law）便化为一条直接联系 v 与 x 的可分离变量方程（separable equation）。第二部分是匀减速问题，所以唯一要做的，就是求出转变一刻的力，再让它在 $\pm 10\%$ 的范围内变动。

解答

模型

我们把太空船视为质量为 M、沿直线运动的质点（particle）。设 x 为进入力场后所行的距离，v 为速率，且在 $x = 0$ 时 $v = V$。唯一的力是阻力（resistance），其方向向后，因此速率一直递减。



速率减半所需的距离

取运动方向为正，并把加速度写成 $v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，由牛顿第二定律得

$$M v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{M\omega\,(v^2 + V^2)}{v} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{v^2}{v^2 + V^2}\,\mathrm{d}v = -\omega\,\mathrm{d}x.$$

想一想 怎样求 $\dfrac{v^2}{v^2+V^2}$ 的积分?

把分子写成 $(v^2+V^2)-V^2$，于是

$$\frac{v^2}{v^2+V^2}=1-\frac{V^2}{v^2+V^2},\qquad \int\frac{v^2}{v^2+V^2}\,\mathrm{d}v=v-V\arctan\frac{v}{V}+C,$$

这里用了标准积分（standard integral）$\int\frac{\mathrm{d}v}{v^2+V^2}=\frac{1}{V}\arctan\frac{v}{V}$。

设 d 为速率降至 $\frac{1}{2}V$ 时所行的距离。由 $(x,v)=(0,V)$ 积分至 $(d,\frac{1}{2}V)$，

$$\begin{aligned}\omega d&=\int_{V/2}^{V}\frac{v^2}{v^2+V^2}\,\mathrm{d}v=\Big[v-V\arctan\frac{v}{V}\Big]_{V/2}^{V}\\&=\frac{V}{2}-V\Big(\arctan 1-\arctan\tfrac{1}{2}\Big)=V\Big(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}+\arctan\frac{1}{2}\Big).\end{aligned}$$

因此所求的距离为

$$d=\frac{V}{\omega}\Big(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}+\arctan\frac{1}{2}\Big)=\frac{V}{\omega}\Big(\frac{1}{2}-\arctan\frac{1}{3}\Big)\approx 0.178\,\frac{V}{\omega}.$$

第二个形式用了 $\arctan 1-\arctan\frac{1}{2}=\arctan\dfrac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\arctan\frac{1}{3}$，这来自正切的差角公式（tangent subtraction formula）（两个角都在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 之内，所以没有歧义）。两个形式都是完整的答案。

恒力

在转变前的一刻，$v=\frac{1}{2}V$，所以阻力的大小为

$$\frac{M\omega(\frac{1}{4}V^2+V^2)}{\frac{1}{2}V}=\frac{5}{2}M\omega V.$$

新的恒力 F 与此值相差不超过 10%，所以

$$\frac{9}{10}\cdot\frac{5}{2}M\omega V\le F\le\frac{11}{10}\cdot\frac{5}{2}M\omega V,\qquad\text{即}\qquad\frac{9}{4}M\omega V\le F\le\frac{11}{4}M\omega V.$$

在恒力作用下，减速度（deceleration）$a=F/M$ 是常数，所以由 $v^2=u^2-2as$，取 $u=\frac{1}{2}V$ 及末速率为 0，得

$$z=\frac{(V/2)^2}{2a}=\frac{MV^2}{8F}.$$

这个量随 F 增大而减小，所以最大的力对应最小的 z，反之亦然：

$$\frac{MV^2}{8\cdot\frac{11}{4}M\omega V}\le z\le\frac{MV^2}{8\cdot\frac{9}{4}M\omega V},\qquad\text{亦即}\qquad\boxed{\frac{V}{22\,\omega}\le z\le\frac{V}{18\,\omega}}$$

（若把“相差不超过 10%”理解为严格的范围，则不等式为严格不等式）。假如力完全不变，则 $z=V/(20\omega)$，位于这个范围的中间。

验算

- 量纲（dimensions）：ω 的单位是 s^{-1}（因为 $M\omega v$ 必须是力），所以 V/ω 是长度，正如两个答案所要求的。
- 系数 $\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{3} \approx 0.1782$ 是正数，且小于 $\frac{1}{2}$。这是应该的：太空船的速率介乎 $\frac{1}{2}V$ 与 V 之间，而减速度至少为 $2\omega V$，所以这段行程最多历时 $1/(4\omega)$，所行距离小于 $V/(4\omega)$。
- 取 $V = \omega = 1$，以数值方法逐步计算 $\dot{v} = -\omega(v^2 + V^2)/v$，得出 $v = \frac{1}{2}$ 时的距离为 0.17825；再逐步计算恒力阶段，当力为原来的 110%、100% 及 90% 时，分别得 $z = 0.0455$、0.0500、0.0556，与 $\frac{1}{22}, \frac{1}{20}, \frac{1}{18}$ 吻合。

常见错误

- 用了 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 而不是 $v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$：这样求得的是时间而不是距离，其后还要多做一次积分。
- 把上下限配反了：力愈大，停下来所需的距离愈短，所以 1.1 倍的力对应的是下限 $V/(22\omega)$。

STEP 之外

写出 $a = v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$，是初次窥见一个更宏大的想法：对于只取决于位置或速率的一维力，我们可以用另一个变量取代时间，从而降低方程的阶（order）；而当力只取决于位置时，这就引出能量守恒（energy conservation）以及描述运动的相平面（phase plane）图像。第二部分是一道关于敏感度（sensitivity）的小练习：数据中的不确定性（这里是力的 $\pm 10\%$）怎样传递到答案之中（z 大约相差 $\mp 10\%$）。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）正是以这种精神处理与速度有关的力。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。