详细解答

STEP I 1989，第 1 题

纯数学 · 组合区域的面积

> **STEP I 1989，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/89-s1-q1

关键思路

这个区域由半圆（semicircle）组成。先取一个大的半圆盘（half-disc），再减去和加上较小的半圆盘，就可以得到它。所以我们只需要知道每个半径，尤其是下方半圆 CDE 的半径，而这可以由直线 AG 上的各段长度求得。把半圆换成抛物线（parabola），方法完全不变，因为抛物线拱（parabolic arch）有一条简单的面积公式，可以取代 $\frac{1}{2}\pi a^2$ 的角色。

解答

半圆

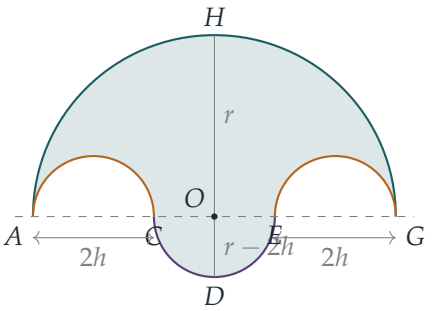
从 A 起沿直线量度。由于 ABC 的半径是 h，所以 $AC = 2h$。同理 $EG = 2h$，而 $AG = 2r$，因为 AHG 的半径是 r。于是

$$CE = 2r - 4h,$$

由于 $2h < r$，这个值是正数。所以半圆 CDE 的半径是 $r - 2h$。它的圆心是 CE 的中点，而根据对称性，这也是 AG 的中点，所以它与大半圆有共同的圆心 O。

从图中可见，ABC 和 EFG 与 H 位于 AG 的同一侧，并且在大半圆之内，而 CDE 则位于另一侧。因此所围成的区域是

$$(\text{半圆盘}AHG) \ - \ (\text{半圆盘}ABC \text{ 和}EFG) \ + \ (\text{半圆盘}CDE).$$



半径为 a 的半圆盘面积是 $\frac{1}{2}\pi a^2$，所以所围成的面积是

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\pi r^2 - 2\cdot\tfrac{1}{2}\pi h^2 + \tfrac{1}{2}\pi(r-2h)^2 &= \tfrac{1}{2}\pi(r^2 - 2h^2 + r^2 - 4rh + 4h^2)\\ &= \tfrac{1}{2}\pi(2r^2 - 4rh + 2h^2)\\ &= \pi(r-h)^2.\end{aligned}$$

？ 想一想 HD 有多长?

点 H 是大半圆的最高点，所以它位于通过 O 而垂直于 AG 的直线上，与 O 相距 r。点 D 是 CDE 的最低点，所以它也在同一条垂直线上，位于直线的另一侧，与 O 相距 $r-2h$。所以

$$HD = r + (r-2h) = 2(r-h),$$

而以 HD 为直径的圆，半径是 $r-h$，面积是 $\pi(r-h)^2$。这正是我们求得的面积，符合题目要求。

抛物线

每个半径为 a 的半圆，都换成一个抛物线拱：它建在同一条长度为 $2a$ 的弦（chord）上，顶点（vertex）在弦的中点上方，高度为 a。把原点设在弦的中点。抛物线关于通过顶点的轴对称，所以它的形式是 $y = a - kx^2$。它通过 $(\pm a, 0)$，所以 $k = 1/a$。拱与弦之间的面积是

$$\int_{-a}^{a}\left(a - \frac{x^2}{a}\right)\mathrm{d}x = 2a^2 - \frac{2a^3}{3a} = \frac{4a^2}{3}.$$

（这就是阿基米德（Archimedes）的结果：外接矩形面积的三分之二，即 $\frac{2}{3}\cdot 2a\cdot a$。）

每个拱仍然位于 AG 的同一侧，与原来的半圆一样。我们还应该检查每个小拱是否仍然在大拱之下。两个拱都从 A 出发，斜率（gradient）同为 2，所以在 A 附近这一点并不明显。在距离 A 为 x 之处，其中 $0 \le x \le 2h$，大拱的高度是 $x(2r-x)/r$，而拱 ABC 的高度是 $x(2h-x)/h$。两者之差是

$$\frac{x(2r-x)}{r} - \frac{x(2h-x)}{h} = x^2\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{r}\right) \ge 0,$$

所以 ABC 确实在 AHG 之内，而根据对称性，EFG 也是如此。因此同样的加减分解依然适用，只需以 $\frac{4}{3}a^2$ 代替 $\frac{1}{2}\pi a^2$：

$$\begin{aligned}\tfrac{4}{3}r^2 - 2\cdot\tfrac{4}{3}h^2 + \tfrac{4}{3}(r-2h)^2 &= \tfrac{4}{3}(2r^2 - 4rh + 2h^2)\\ &= \tfrac{8}{3}(r-h)^2.\end{aligned}$$

所以换成抛物线后，所围成的面积是 $\frac{8}{3}(r-h)^2$。

验算

- 两个答案都是一个常数乘以 $(r-h)^2$。这是必然的，因为两个计算的结构完全相同：只有单个拱的系数改变了，由 $\frac{\pi}{2}$ 变成 $\frac{4}{3}$。比值 $\frac{8/3}{\pi} \approx 0.849$ 小于 1，这是合理的，因为弦和高度都相同的抛物线拱位于半圆之内。
- 极限情况 $h \to 0$：小拱消失，而 CDE 变成一个半径为 r 的完整下半圆，合起来是一个面积为 πr^2 的完整圆盘。公式 $\pi(r-h)^2$ 与此吻合。
- 数值上，取 $r = 3$ 和 $h = 1$（即试卷图中的比例），面积分别是 $4\pi \approx 12.566$ 和 $\frac{32}{3} \approx 10.667$。对描出的边界以鞋带公式（shoelace formula）计算，取八组随机的 (r,h)，结果与两条公式都吻合，误差在离散化误差范围之内。

常见错误

- 把 CDE 的半径当作 $r-h$ 或 $r-4h$。把 AG 上的各段长度画出来：$CE = 2r - 4h$，所以它的半径是 $r-2h$。
- 把上方的小半圆加上去，而不是减去。它们是从大半圆盘中切走的部分，所以其面积要减掉。

STEP 之外

第一部分的图形是*鞋匠刀形*（arbelos，即“鞋匠的刀”），是阿基米德研究过的一种形状。它的经典形式是一个大半圆，内有两个较小的半圆，而它的面积同样等于以某条精心选取的弦为直径的圆的面积。阿基米德还发现了抛物线弓形的 $\frac{2}{3}$ 法则，所用的极限论证已经很接近积分。在大学里，从他的“穷竭法”（method of exhaustion）走到黎曼积分（Riemann integral）的那一步，是第一门分析课程的核心内容。想了解这一步，Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析学入门教材）是很好的选择。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。