详细解答

STEP III 1988，第 8 题

纯数学 • 抛物线的切线与法线

> **STEP III 1988，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q8

关键思路

把每一条直线都用参数（parameter）t 表示，求出各对直线的交点，再把这些顶点代入行列式（determinant）。这些行列式看来很繁复，但它们对 t_1, t_2, t_3 是反对称（antisymmetric）的，所以每一个都必定是 $(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)$ 的倍数。只要用简单的行运算和列运算（row and column operations），就可以把这个因子提出来，余下的就是两个面积之间的比较。

（印刷的题目要求的是 A_3；这是 A_2 的误印，即法线三角形的面积。）

解答

切线与法线

沿着 $x = at^2, y = 2at$ 把 $y^2 = 4ax$ 对 t 求导，得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2a}{2at} = \dfrac{1}{t}$。在 $(at^2, 2at)$ 的切线（tangent）是 $y - 2at = \frac{1}{t}(x - at^2)$，即

$$ty = x + at^2.$$

这个形式在 $t = 0$ 时也成立（在顶点的切线是 $x = 0$）。法线（normal）的斜率（gradient）是 $-t$：

$$y + tx = 2at + at^3.$$

我们全程假设 $a \neq 0$。

切线三角形

把在 t_i 和 t_j 的切线方程相减，得 $(t_i - t_j)y = a(t_i^2 - t_j^2)$。由于 $t_i \neq t_j$，我们可以相除，所以 $y = a(t_i + t_j)$，于是 $x = t_i y - at_i^2 = at_i t_j$。因此

$$在t_i, t_j \text{ 的两条切线相交于}(at_i t_j,\ a(t_i + t_j)).$$

各切线的斜率 $1/t_i$ 互不相同（或者其中一条是铅垂的），所以没有两条是平行的，三角形确实存在。记 $s = t_1 + t_2 + t_3$。与 P_1 相对的顶点是 $(at_2t_3,\ a(s - t_1))$，其余两个顶点类似。从首两列各提出因子 a，然后把第 3 列的 $-s$ 倍加到第 2 列，再把第 2 列变号，

$$\det\begin{pmatrix} at_2t_3 & a(s-t_1) & 1 \\ at_1t_3 & a(s-t_2) & 1 \\ at_1t_2 & a(s-t_3) & 1 \end{pmatrix} = -a^2 \det\begin{pmatrix} t_2t_3 & t_1 & 1 \\ t_1t_3 & t_2 & 1 \\ t_1t_2 & t_3 & 1 \end{pmatrix} = a^2 D,$$

当中我们对调了首两列，并设

$$D = \det\begin{pmatrix} t_1 & t_2t_3 & 1 \\ t_2 & t_1t_3 & 1 \\ t_3 & t_1t_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

要计算 D，把第 1 行换成第 1 行 − 第 2 行，把第 2 行换成第 2 行 − 第 3 行。第 1 行变成 $(t_1 - t_2,\ t_3(t_2 - t_1),\ 0) = (t_1 - t_2)(1,\ -t_3,\ 0)$，而第 2 行变成 $(t_2 - t_3)(1,\ -t_1,\ 0)$。沿最后一列展开，

$$D = (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)\det\begin{pmatrix} 1 & -t_3 \\ 1 & -t_1 \end{pmatrix} = (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1).$$

因此

$$A_1 = \tfrac{1}{2}a^2\,|(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)|,$$

由于各 t_i 互不相同，这个面积不等于零。

法线三角形

把在 t_i 和 t_j 的法线方程相减，得 $(t_i - t_j)x = 2a(t_i - t_j) + a(t_i^3 - t_j^3)$，所以除以 $t_i - t_j \neq 0$ 后，

$$x = 2a + a(t_i^2 + t_it_j + t_j^2), \qquad y = 2at_i + at_i^3 - t_ix = -at_it_j(t_i + t_j).$$

各法线的斜率 $-t_i$ 互不相同，所以同样地每一对法线都相交。对于与 P_1 相对的顶点，利用 $t_2 + t_3 = s - t_1$，并记 $e_1 = t_2t_3$（以及 $e_2 = t_1t_3, e_3 = t_1t_2$）。那么

$$t_2^2 + t_2t_3 + t_3^2 = (t_2 + t_3)^2 - t_2t_3 = (s - t_1)^2 - e_1, \qquad -t_2t_3(t_2 + t_3) = -se_1 + p,$$

其中 $p = t_1t_2t_3$。所以这个顶点是 $a(2 + (s - t_1)^2 - e_1,\ -se_1 + p)$，其余两个顶点类似。现在提出 a^2，并进行不改变行列式的值的列运算：从第 1 列减去第 3 列的 2 倍，从第 2 列减去第 3 列的 p 倍，然后从第 2 列提出因子 $-s$：

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2}\det(\text{法线三角形的顶点}) &= \det\begin{pmatrix}(s-t_i)^2-e_i & -se_i & 1\end{pmatrix}_{i=1,2,3}\\ &= -s\det\begin{pmatrix}(s-t_i)^2-e_i & e_i & 1\end{pmatrix}_{i=1,2,3},\end{aligned}$$

当中每个式子只显示有代表性的第 i 行。接着把第 2 列加到第 1 列，这样就消去了 $-e_i$，再展开 $(s - t_i)^2 = s^2 - 2st_i + t_i^2$。当中的 s^2 是第 3 列的倍数，可以消去，而行列式对第 1 列是线性的：

$$\det\begin{pmatrix}t_i^2-2st_i & e_i & 1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}t_i^2 & e_i & 1\end{pmatrix} - 2s\det\begin{pmatrix}t_i & e_i & 1\end{pmatrix} = E - 2sD,$$

这里我们如此记这两个行列式。第二个行列式正好就是 D。

想一想 我们怎样计算 E，即各行为 $(t_i^2,\ e_i,\ 1)$ 的行列式?

使用与计算 D 时相同的行运算。第 1 行 − 第 2 行是 $(t_1^2 - t_2^2,\ t_3(t_2 - t_1),\ 0) = (t_1 - t_2)(t_1 + t_2,\ -t_3,\ 0)$，而第 2 行 − 第 3 行是 $(t_2 - t_3)(t_2 + t_3,\ -t_1,\ 0)$。所以

$$\begin{aligned}E &= (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)[-t_1(t_1 + t_2) + t_3(t_2 + t_3)]\\ &= (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)[(t_3^2 - t_1^2) + t_2(t_3 - t_1)]\\ &= (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)(t_1 + t_2 + t_3) = sD.\end{aligned}$$

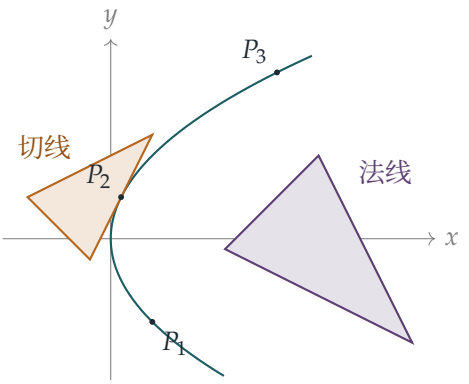
把以上各步合起来，

$$\det(\text{法线三角形的顶点}) = a^2 \cdot (-s)\,(sD - 2sD) = a^2s^2D.$$

取绝对值的一半，并与 $A_1 = \frac{1}{2}a^2|D|$ 比较，

$$A_2 = (t_1 + t_2 + t_3)^2 A_1,$$

这就是所求的结果。



图中取 $a = 1$ 及 $t_1, t_2, t_3 = -1, \frac{1}{2}, 2$，所以 $s = \frac{3}{2}$。切线三角形（琥珀色）的面积是 $\frac{27}{8}$，而法线三角形（紫红色）的面积是 $\frac{243}{32} = (\frac{3}{2})^2 \cdot \frac{27}{8}$。

法线何时共点？

没有两条法线是平行的，所以它们两两相交于三点 Q_{12}, Q_{13}, Q_{23}。如果三条法线共点（concurrent），这三点就会重合，三角形的面积为零。反过来，假设面积为零但三点并非全部相同，例如 $Q_{12} \neq Q_{13}$。这两点都在 P_1 的法线上，所以通过它们的直线就是该法线。由于三点共线（collinear），Q_{23} 也在 P_1 的法线上。于是 Q_{23} 同时在三条法线上，所以 $Q_{23} = Q_{12}$（在 P_1 和 P_2 的两条法线的唯一公共点），同理 $Q_{23} = Q_{13}$，这就产生矛盾。所以

$$\text{三条法线共点} \iff A_2 = 0 \iff (t_1 + t_2 + t_3)^2 A_1 = 0 \iff t_1 + t_2 + t_3 = 0,$$

这里用到 $A_1 \neq 0$，因为各 t_i 互不相同。所求的条件是 $t_1 + t_2 + t_3 = 0$。

验算

- 取 $t_1, t_2, t_3 = 0, 1, 2$ 及 $a = 1$，切线三角形的顶点是 $(2, 3)$、$(0, 2)$、$(0, 1)$，面积为 1，而 $\frac{1}{2}|D| = \frac{1}{2}|(-1)(-1)(2)| = 1$。
- 在 $t = 1, 2, -3$（总和为零，$a = 1$）的法线全部通过 $(9, -6)$。例如，在 $t = 1$ 的法线是 $y + x = 3$。
- 我们用电脑以分数作精确计算，对大约 2,800 组随机选取的 a 和互不相同的 t_i 求出各顶点，每一次都确认了 $A_2 = (t_1 + t_2 + t_3)^2 A_1$。

常见错误

- 忘记说明三条直线确实构成一个三角形。我们需要的是两两不平行，而这里可由斜率互不相同得出。
- 未加理由就从 $A_2 = 0$ 断定法线共点。面积为零只说明三个交点共线，上面那段简短的论证才把它提升为“相同”。
- 把 3×3 行列式完全展开。这样做是可行的，但几乎肯定会出现正负号错误。应先用行运算提出因子 $(t_i - t_j)$。

STEP 之外

因子 $(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)$ 是一个范德蒙行列式（Vandermonde determinant），而 $E = sD$ 中的余因子 $t_1 + t_2 + t_3$ 是一个对称多项式（symmetric polynomial）。任何反对称多项式都是范德蒙乘积乘以一个对称多项式，这个事实在行列式和对称函数的理论中会再次出现。法线三角形与抛物线的渐屈线（evolute）有关，渐屈线是抛物线的曲率中心（centres of curvature）所描出的曲线，也就是各法线的包络线（envelope）。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）对行列式及其行运算有很好的讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。