详细解答

STEP III 1988，第 6 题

纯数学 · 逐次微分

STEP III 1988，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/88-s3-q6

关键思路

直接把一个乘积求导 1988 次是行不通的，但正弦与余弦的乘积可以改写成一个和。这样每一项 $\sin kx$ 的导数（derivative）便以四步为一个循环，每求导一次就多出一个因子 k。至于零点（zero），$\sin 3x$ 前面那个庞大的因子 3^{1988} 意味着导数只可能在 $\sin 3x$ 几乎为零的地方等于零，所以我们只需看 $\sin 3x$ 第一个零点稍后的位置，然后作线性化（linearise）。

解答

第 1988 阶导数

由积化和差公式（product-to-sum formula）$2\sin A\cos B = \sin(A+B)+\sin(A-B)$，

$$\mathrm{f}(x) = \sin 2x\cos x = \tfrac{1}{2}\left(\sin 3x + \sin x\right).$$

把 $\sin kx$ 求导四次，得

$$\sin kx \;\to\; k\cos kx \;\to\; -k^2\sin kx \;\to\; -k^3\cos kx \;\to\; k^4\sin kx,$$

所以每求导四次，效果只是把 $\sin kx$ 乘以 k^4。（等价地说，$\sin kx$ 的第 n 阶导数是 $k^n\sin\left(kx+\frac{1}{2}n\pi\right)$。）由于 $1988 = 4\times 497$，

$$\mathrm{f}^{(1988)}(x) = \tfrac{1}{2}\left(3^{1988}\sin 3x + \sin x\right).$$

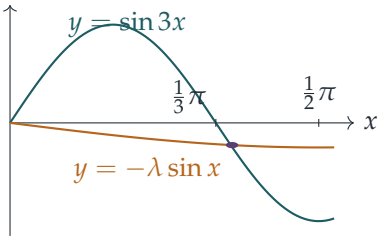
最小的正零点

我们要找出满足下式的最小 $x>0$：

$$3^{1988}\sin 3x + \sin x = 0. \qquad (*)$$

在 $(0, \frac{1}{3}\pi]$ 内没有零点。当 $0 < x < \frac{1}{3}\pi$ 时，$0 < 3x < \pi$，所以 $\sin 3x$ 和 $\sin x$ 都是正数，$(*)$ 的左边为正。在 $x = \frac{1}{3}\pi$ 处，左边等于 $0 + \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$。

紧接 $\frac{1}{3}\pi$ 之后有一个零点。在 $x = \frac{1}{2}\pi$ 处，左边是 $3^{1988}\sin\frac{3}{2}\pi + 1 = 1 - 3^{1988} < 0$。左边是连续（continuous）的，所以由介值定理（intermediate value theorem），在 $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 内必有零点，而最小的正零点就是其中的第一个。把它写成 $x = \frac{1}{3}\pi + \epsilon$，其中 $0 < \epsilon < \frac{1}{6}\pi$。



草图把 $(*)$ 表示为 $\sin 3x = -\lambda \sin x$，其中 $\lambda = 3^{-1988}$（图中画得远比实际大）。两条曲线首次相交之处，就在 $\sin 3x$ 于 $\frac{1}{3}\pi$ 穿过零之后不远；对于真正的、极其微小的 λ，交点几乎被推到 $\frac{1}{3}\pi$ 上。

由于 $\sin(\pi + 3\epsilon) = -\sin 3\epsilon$，方程 $(*)$ 变成

$$3^{1988}\sin 3\epsilon = \sin\left(\tfrac{1}{3}\pi + \epsilon\right). \qquad (**)$$

想一想 我们怎样知道 ϵ 小得足以使用 $\sin 3\epsilon \approx 3\epsilon$?

$(**)$ 的右边最多是 1，所以 $\sin 3\epsilon \le 3^{-1988}$。由于 $0 < 3\epsilon < \frac{1}{2}\pi$，而在 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上有 $\sin t \ge \frac{2t}{\pi}$（正弦曲线在该区间内位于其弦（chord）的上方），我们得到 $3\epsilon \le \frac{\pi}{2}3^{-1988}$。所以 ϵ 小得难以想像，这就说明了以下的近似是合理的。

ϵ 既然这样小，便有 $\sin 3\epsilon = 3\epsilon\,(1 + O(\epsilon^2))$ 和 $\sin(\frac{1}{3}\pi + \epsilon) = \frac{\sqrt{3}}{2} + O(\epsilon)$。代入 $(**)$，

$$3^{1989}\epsilon \approx \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \text{所以} \qquad \epsilon \approx \frac{3^{-1989}\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3^{-1988}\sqrt{3}}{2},$$

其相对误差（relative error）的阶为 3^{-1988}。

关于试卷上印出的数值。 试卷要求证明 $\epsilon \approx \frac{1}{2}3^{-1988}\sqrt{3}$，这是此处所得数值的三倍。因子 3 来自 $\sin 3\epsilon \approx 3\epsilon$，而下面的数值验算也确认答案是 3^{-1989}，而不是 3^{-1988}。所以题目看来有一处笔误：它原意要用的方法正是上面的方法，只是 3 的幂次差了一。如果你得到的是 3^{-1989}，请相信自己的计算。

验算

- 同样的论证适用于任何 4 的倍数 n：$3^n \sin 3x + \sin x$ 的第一个正零点位于 $\frac{1}{3}\pi + \epsilon_n$，其中 $\epsilon_n \approx \frac{1}{2}3^{-(n+1)}\sqrt{3}$。当 $n = 4$ 时，数值求解得 $\epsilon_4 = 3.5713 \times 10^{-3}$，而预测值是 $\frac{1}{2}\sqrt{3}/3^5 = 3.5640 \times 10^{-3}$（比值为 1.0021）。当 $n = 8$ 时，比值是 1.000025；到了 $n = 40$ 及以上，比值在机器精度内等于 1。它与 $\frac{1}{2}\sqrt{3}/3^n$ 的比值则趋向 $\frac{1}{3}$。
- 导数公式可以用最初几个情况来检验：$\mathrm{f}^{(4)}(x) = \frac{1}{2}(81\sin 3x + \sin x)$，你可以把 $\frac{1}{2}(\sin 3x + \sin x)$ 求导四次来确认。

常见错误

- 弄错正负号或相位：只有在求导次数是四的倍数之后，$\sin kx$ 才会回到 $+k^n \sin kx$。
- 忘记排除 $(0, \frac{1}{3}\pi)$ 内的零点；正是那里的正负号论证，才使 $\frac{1}{3}\pi + \epsilon$ 成为最小的正零点。
- 写成 $\sin(\pi + 3\epsilon) \approx \epsilon$ 而不是 -3ϵ，漏掉了正负号或因子 3。

STEP 之外

第二部分是*摄动理论*（perturbation theory）的一个简单例子：一个很大的参数迫使解非常贴近某个已知的根，而在该根附近作线性化便得出首项修正，误差的大小则由泰勒级数（Taylor series）的下一项控制。利用 $O(\cdot)$ 记号和误差界，把“近似等于”说得精确，是大学第一门分析课程的核心主题；参见 Abbott 的 *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。