详细解答

STEP III 1988，第 5 题

纯数学 · 递推关系与贷款

STEP III 1988，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/88-s3-q5

关键思路

先写下债务在一天之内的变化。每天债务先乘以 $1+k$（利息），然后加上（挖掘成本）或减去（收入）一个固定金额。形如 $S_n = (1+k)S_{n-1} +$ 常数 的递推关系（recurrence）逐层展开后，就是一个等比级数（geometric series）。最后一部分则归结为一个比较：隧道通车那一刻，每日收入是否多于债务的利息？

解答

挖掘隧道期间的债务

利率为 $100k\%$，即 £S 的债务每天的利息是 £kS。设 S_n 为第 n 天结束时的债务（以英镑计），其中 $S_0 = 0$。在第 $n \le T$ 天结束时，公司要借入 c 支付挖掘费用，另借入 kS_{n-1} 支付利息，所以

$$S_n = S_{n-1} + kS_{n-1} + c = (1+k)S_{n-1} + c.$$

由 $S_0 = 0$ 开始，反复运用这个关系，

$$\begin{aligned} S_n &= c + (1+k)S_{n-1} \\ &= c + c(1+k) + (1+k)^2 S_{n-2} \\ &= \cdots = c[1 + (1+k) + (1+k)^2 + \cdots + (1+k)^{n-1}]. \end{aligned}$$

这是一个共有 n 项、公比（common ratio）为 $1+k \neq 1$（因为 $k > 0$）的等比级数，所以

$$S_n = \frac{c[(1+k)^n - 1]}{k}, \qquad n \le T,$$

正是所求的结果。（为严谨起见，可用归纳法（induction）验证：公式给出 $S_0 = 0$；若公式对 S_{n-1} 成立，则 $(1+k)S_{n-1} + c = \frac{c}{k}[(1+k)^n - (1+k) + k]$，这正是 S_n 的公式。）

隧道通车后的债务

由第 $T+1$ 天起，不再需要挖掘。每天债务增加利息 kS，而公司还款 d，所以只要债务仍然是正数，就有

$$S_{T+j} = (1+k)S_{T+j-1} - d.$$

这与之前的递推关系相同，只是 c 换成了 $-d$，而且现在是由 S_T 而不是由 0 开始。展开 m 次，

$$\begin{aligned} S_{T+m} &= (1+k)^m S_T - d[1 + (1+k) + \cdots + (1+k)^{m-1}] \\ &= (1+k)^m S_T - \frac{d[(1+k)^m - 1]}{k}. \end{aligned}$$

代入第一部分求得的 S_T，

$$S_{T+m} = \frac{c[(1+k)^T - 1](1+k)^m - d[(1+k)^m - 1]}{k}.$$

我们需要 $S_{T+m} > 0$，因为这个递推关系只在债务尚未还清时适用。到了还清债务的那一天，公司只需偿还所欠的余额，而不是整笔 d。

债务何时还清

把含 $(1+k)^m$ 的项合并：

$$S_{T+m} = \frac{d}{k} - \frac{(1+k)^m}{k}\Big(d - c[(1+k)^T - 1]\Big).$$

想一想 从金钱的角度看，条件 $d/c > (1+k)^T - 1$ 究竟是甚么意思？

把它乘以 c：条件变成 $d > c[(1+k)^T - 1] = kS_T$。换句话说，第一天的收入多于隧道通车时债务的利息。因此债务在第 $T+1$ 天下降，利息亦随之减少，于是债务下降得愈来愈快。以下的代数运算把这个想法严格地表达出来。

假设 $d > c[(1+k)^T - 1]$，并记 $\delta = d - c[(1+k)^T - 1] > 0$。那么

$$S_{T+m} = \frac{d - \delta(1+k)^m}{k}.$$

由于 $1+k > 1$，当 $m \to \infty$ 时 $(1+k)^m \to \infty$，所以 $\delta(1+k)^m$ 终会超过 d。这条公式只在债务为正数时成立，因此不可能永远成立：必定有第一天，余下的债务加上当天的利息不超过 d，公司就在那一天把债务还清。事实上，债务在第 $T+m$ 天还清，其中 m 是满足下式的最小值：

$$(1+k)^m \geq \frac{d}{\delta}, \qquad \text{即} \qquad m \geq \frac{\ln(d/\delta)}{\ln(1+k)}.$$

所以，若 $d/c > (1+k)^T - 1$，公司最终能还清债务，正是所求的结果。

这个条件也是必要的。若 $d \le kS_T$，则 $\delta \le 0$；又因为 $S_T = (d-\delta)/k$，

$$S_{T+m} - S_T = \frac{-\delta[(1+k)^m - 1]}{k} \ge 0$$

对所有 m 都成立。债务永远不会低于 S_T，所以永远无法还清。

验算

- 代入 $n=1$：$S_1 = c$。这是对的，因为第 1 天并无欠款，所以无须支付利息。
- 在 S_{T+m} 的公式中代入 $m=0$：得出 S_T，与预期相符。
- 若刚好有 $d = kS_T$，则 $\delta = 0$，而且对所有 m 都有 $S_{T+m} = d/k = S_T$：收入仅仅足够支付利息，债务始终不变。这是临界情况。
- 取 $c=100$、$k=0.01$、$T=30$ 逐日模拟，得出 $S_T \approx 3478.49$，与公式吻合。门槛是 $d > 34.78$。取 $d=50$ 时，债务在 $m=120$ 天后还清，与 $\ln(50/15.22)/\ln 1.01 \approx 119.6$ 相符。

常见错误

- 在第 1 天就计算利息，或者把级数数成 $n+1$ 项。由于 $S_0 = 0$，第一天的成本刚好是 c。
- 忘记第 T 天之后级数是由 S_T 而不是由 0 开始：$(1+k)^m S_T$ 这一项很容易漏掉。
- 说债务能还清是因为“d 大于 c”。真正要比较的，是 d 与通车时的利息 kS_T。

STEP 之外

递推关系 $S_n = aS_{n-1} + b$ 是最简单的*一阶线性差分方程*（linear first-order difference equation）。它的解是不动点（fixed point）$b/(1-a)$ 加上 a^n 的某个倍数，这正是我们那条公式的形式：d/k 加上 $(1+k)^m$ 的某个倍数。这个倍数是正还是负，决定了债务是不断增长还是得以还清；同样的想法会在不动点的稳定性（stability）和线性常微分方程（linear ODE）中再次出现。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入门教科书）把差分方程与微分方程并列讨论，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 进阶题集）则有更多关于递推关系的 STEP 练习。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。