详细解答

STEP III 1988，第 4 题

纯数学 · 弧长的最优化

STEP III 1988，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/88-s3-q4

关键思路

把道路的总长度写成函数 $L(b)$，然后求导（differentiate）。位于铅垂平面内的两段路必须贴着地面走，所以它们的长度是抛物线的弧长（arc length）；半圆的长度是 πb。把弧长积分对其下限求导，根本不需要做任何积分，而 $L'(b)$ 的正负号就决定了一切。

（题目印出的横截面公式左边是 $x=$；当然应该是 $z=$。）

解答

建立长度的表达式

设 $h(b)=(a^2-b^2)/(2a)$，即山丘在距离对称轴 b 处的高度。道路必须铺在地面上，所以在 (x,z) 平面内由 $(-R,0)$ 到 $(-b,h(b))$ 的路径别无选择：它先沿平地由 $x=-R$ 走到 $x=-a$，再沿抛物线由 $x=-a$ 上行至 $x=-b$。第 (iii) 段是它的镜像。

在山丘上 $z=(a^2-x^2)/(2a)$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{x}{a}$，而由 $x=b$ 到 $x=a$ 的弧长是

$$\int_b^a \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x.$$

半圆 (ii) 是水平的，位于高度 $h(b)$，半径为 b（它是山丘上通过 $(\pm b,h(b))$ 的纬圈），所以长度是 πb。因此

$$L(b)=2(R-a)+2\int_b^a \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x+\pi b,\qquad 0\le b\le a.$$

这个式子也涵盖了 $b=0$（没有半圆；道路直接越过山顶）和 $b=a$（道路绕着山脚走）两种情况。

求最小值

根据微积分基本定理（fundamental theorem of calculus），对下限求导，所得的是被积函数（integrand）在该处的值再加上负号：

$$L'(b) = \pi - 2\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}.$$

> ? **想一想** 驻点（stationary point）会在哪里？它在容许的范围内吗？

$L'(b) = 0$ 需要 $1 + b^2/a^2 = \pi^2/4$，即 $b = \frac{a}{2}\sqrt{\pi^2 - 4} \approx 1.21a$。这比 a 大，所以落在容许范围 $0 \le b \le a$ 之外。事实上，当 $0 \le b \le a$ 时，我们有

$$2\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \le 2\sqrt{2} \approx 2.83 < \pi,$$

所以在整个区间上 $L'(b) > 0$。L 严格递增（strictly increasing），其最小值出现在左端点 $b = 0$。

建议： 取 $b = 0$。道路应该从山丘的一边直上，再从另一边直下，不必绕半圆的弯路。

省下多少路程

顺带一提，原函数（antiderivative）是

$$\int \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} + \frac{a}{2}\sinh^{-1}\frac{x}{a} + C,$$

（代入 $x = a\sinh t$），所以

$$L(0) = 2(R - a) + a(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})) \approx 2(R - a) + 2.296a,$$

而绕山脚走则得 $L(a) = 2(R - a) + \pi a \approx 2(R - a) + 3.142a$。越过山顶大约可省下 $0.85a$。

验算

- 答案与 R 无关，这是理所当然的：不论 b 是多少，平地部分的总长度都是 $2(R - a)$。
- 粗略检查一下是否合理：山丘只有 $a/2$ 高、$2a$ 宽，所以越过它不可能比直线距离 $2a$ 多出很多；而绕山脚的半圆长 πa。果然 $2.296a$ 介乎 $2a$ 与 πa 之间。
- 数值上，取 $a = 1$ 和 $R = 3$，在 $[0, 1]$ 的 201 个点上以数值积分（quadrature）计算 $L(b)$，最小值出现在 $b = 0$；而 $L'(a) = \pi - 2\sqrt{2} \approx 0.313$ 仍然是正数。

常见错误

- 令 $L'(b) = 0$ 并写下 $b = \frac{a}{2}\sqrt{\pi^2 - 4}$，却没有留意到它比 a 大。
- 第 (i) 段和第 (iii) 段用了直线（弦）的长度：那样的路会穿山而过。
- 忘记了闭区间（closed interval）上的最小值可以出现在端点。

STEP 之外

在曲面上寻找最短路径，就是测地线（geodesics）的问题，在变分法（calculus of variations）或微分几何（differential geometry）的入门课程中会遇到。在旋转曲面（surface of revolution）上，克莱罗关系式（Clairaut's relation）简洁地刻画了测地线；国王的这一族道路，只是该问题中一个小小的单参数切片。这里用到的两个分析学事实——对积分的上下限求导，以及闭区间上的连续函数（continuous function）必定取得最小值——在 Abbott 的 *Understanding Analysis* 中有严谨的证明。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。