详细解答

STEP III 1988，第 3 题

纯数学 · 复数轨迹

> **STEP III 1988，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q3

关键思路

映射 $w = (z+\mathrm{i})/(z-\mathrm{i})$ 可以倒过来用：解出 z 得 $z = \mathrm{i}(w+1)/(w-1)$，于是任何关于 z 的条件都变成关于 w 的条件。至于那个圆，则改用参数表示（parametrisation）来处理，因为这时 $z-\mathrm{i}$ 就只是 $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$。对于实数和虚数两种情况，可从模（modulus）和辐角（argument）着眼：实数 z 与 i 和 $-\mathrm{i}$ 等距。

解答

参数形式

曲线 $|z-\mathrm{i}| = 2$ 是以 i 为圆心、半径为 2 的圆，所以

$$z = \mathrm{i} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \qquad -\pi < \theta \leq \pi,$$

或者，设 $z = x + \mathrm{i}y$，则 $x = 2\cos\theta$ 及 $y = 1 + 2\sin\theta$。

我们还会用到逆映射（inverse map）。由 $w(z-\mathrm{i}) = z+\mathrm{i}$ 得 $z(w-1) = \mathrm{i}(w+1)$，所以当 $w \neq 1$ 时

$$z = \frac{\mathrm{i}(w+1)}{w-1}.$$

没有任何 z 会给出 $w = 1$，因为那需要 $z+\mathrm{i} = z-\mathrm{i}$。每个 $w \neq 1$ 都来自恰好一个 $z \neq \mathrm{i}$。

第 (i) 部分

代入参数形式，$z+\mathrm{i} = 2\mathrm{i} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 及 $z-\mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，所以

$$w = \frac{2\mathrm{i} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = 1 + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/2-\theta)}.$$

当 θ 绕行一周时，$\pi/2 - \theta$ 也恰好取遍每个角度一次。所以 w 描出整个圆

$$|w - 1| = 1,$$

其圆心为 1，半径为 1。例如，$z = 3\mathrm{i}$ 给出 $w = 2$，而 $z = -\mathrm{i}$ 给出 $w = 0$。点 $w = 1$ 不在这个圆上，这与它永远取不到的事实一致。

第 (ii) 部分

若 $z = x$ 是实数，它与 i 的距离等于它与 $-\mathrm{i}$ 的距离，所以 $|x + \mathrm{i}| = |x - \mathrm{i}|$，而且

$$|w| = \frac{|x + \mathrm{i}|}{|x - \mathrm{i}|} = 1.$$

具体地说，把分子和分母同乘以 $x + \mathrm{i}$，

$$w = \frac{(x + \mathrm{i})^2}{x^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + \mathrm{i}\,\frac{2x}{x^2 + 1}.$$

想一想 单位圆上的每一点都能取到吗?

不，还差一点。任取满足 $|w| = 1$ 且 $w \neq 1$ 的 w，并写成 $w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$。那么

$$z = \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} + 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} - 1} = \mathrm{i}\,\frac{2\cos(\phi/2)}{2\mathrm{i}\sin(\phi/2)} = \cot\tfrac{\phi}{2},$$

这是实数。所以每个这样的点都能取到，但 $w = 1$ 永远取不到：它是 $x \to \pm\infty$ 时的极限。所求轨迹（locus）是单位圆 $|w| = 1$ 除去 $w = 1$ 这一点。例如，$x = 0$ 给出 $w = -1$，而 $x = 1$ 给出 $w = \mathrm{i}$。

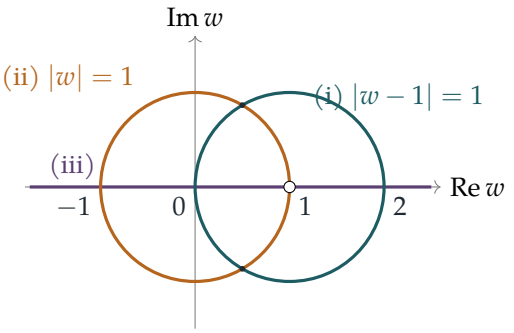
第 (iii) 部分

若 $z = \mathrm{i}y$，其中 y 为实数且 $y \neq 1$，则

$$w = \frac{\mathrm{i}(y + 1)}{\mathrm{i}(y - 1)} = \frac{y + 1}{y - 1} = 1 + \frac{2}{y - 1},$$

这是实数。当 y 取遍 1 以外的所有实数时，分数 $2/(y - 1)$ 取遍每个非零实数值，所以 w 取遍 1 以外的每个实数值。（反过来，若 $w = u$ 是实数且 $u \neq 1$，则 $z = \mathrm{i}(u + 1)/(u - 1)$ 是虚数。）所求轨迹是实轴除去 $w = 1$ 这一点。这里 $z = 0$ 给出 $w = -1$；如果你把“虚数”理解为不包括 $z = 0$，那么 $w = -1$ 也要除去。

略图



蓝绿色的圆是 (i) 的轨迹，琥珀色的圆（除去点 1）是 (ii) 的轨迹，紫色的轴（除去点 1）是 (iii) 的轨迹。空心圆点标示 $w = 1$，这一点永远取不到。

验算

- (i) 中的圆与实轴相交于 $z = \pm\sqrt{3}$。这两点应该映射到同时位于蓝绿色圆和琥珀色圆上的点，而事实上 $w(\sqrt{3}) = (\sqrt{3}+\mathrm{i})^2/4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \approx 0.5 + 0.866\mathrm{i}$，它确实既在 $|w| = 1$ 上，也在 $|w-1| = 1$ 上。
- (i) 中的圆与虚轴相交于 $3\mathrm{i}$ 和 $-\mathrm{i}$，它们分别映射到 2 和 0：正好是蓝绿色圆与实轴相交之处。
- 在每条轨迹上各取 10^4 个随机点作数值检验，结果确认了 $|w-1| = 1$、$|w| = 1$ 和 $\operatorname{Im} w = 0$，并显示逆映射能还原出 z。

常见错误

- 忘记 (ii) 和 (iii) 中缺少了 $w = 1$。它对应于“$z = \infty$”。
- 在 (i) 中展开成 x 和 y，结果迷失在代数运算之中。参数表示令 $z - \mathrm{i}$ 变成单一个指数式，余下的只需一行。

STEP 之外

映射 $z \mapsto (z+\mathrm{i})/(z-\mathrm{i})$ 是一个莫比乌斯变换（Möbius transformation）。这类映射总是把圆和直线映射成圆和直线，这正是你在三个部分中所发现的。要理解它们，最好放在黎曼球面（Riemann sphere）上看：在那里加入一个“无穷远点”（point at infinity），便填补了 $w = 1$ 处的缺口。它的近亲凯莱变换（Cayley transform）$z \mapsto (z-\mathrm{i})/(z+\mathrm{i})$ 把上

半平面（upper half-plane）映射到单位圆盘（unit disc）上。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）对这一切有十分优美的几何处理。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。