详细解答

STEP III 1988，第 2 题

纯数学 · 线性递推关系

STEP III 1988，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/88-s3-q2

关键思路

常系数线性递归关系（linear recurrence with constant coefficients）的表现就像一条二次方程：幂 x^n 是它的解，当且仅当 x 是辅助方程（auxiliary equation）的根。由于只要知道首两项，递归关系便决定了其后每一项，所以只需配对 u_0 和 u_1，就能得到唯一的解。最后一部分的系数是可变的，但因子 $(n+1)$、$(n+2)$、$(n+3)$ 提示我们把全式除以它们的乘积，然后用一个简单的代换（substitution），便可把它化为第一种的常系数递归关系。

解答

（试卷上把递归关系的首项系数印成 α。这显然是 a 的误植，应与二次式 ax^2+bx+c 一致，我们就按此理解。）由于这条二次方程有两个根，它确实是二次的，所以 $a \neq 0$。

公式满足递归关系

设 $u_n = A\alpha^n + B\beta^n$，其中 A、B 为任意常数。那么

$$\begin{aligned} au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n &= A\alpha^n\left(a\alpha^2 + b\alpha + c\right) + B\beta^n\left(a\beta^2 + b\beta + c\right) \\ &= A\alpha^n \cdot 0 + B\beta^n \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

因为 α 和 β 是 $ax^2+bx+c=0$ 的根。所以递归关系对每个 $n \geq 0$ 都成立。

取题目所给的特定 A 和 B 时，公式亦能重现初始值。当 $n=0$，

$$A + B = \frac{(u_1 - \beta u_0) - (u_1 - \alpha u_0)}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha - \beta)u_0}{\alpha - \beta} = u_0,$$

而当 $n = 1$，

$$A\alpha + B\beta = \frac{\alpha u_1 - \alpha\beta u_0 - \beta u_1 + \alpha\beta u_0}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha - \beta)u_1}{\alpha - \beta} = u_1.$$

由于两根相异，所以可以除以 $\alpha - \beta$。

它是唯一的解

> **想一想** 我们究竟是对甚么作归纳？为甚么每次需要两项？

假设 $u_0, u_1, u_2, \ldots$ 是任何一个满足该递归关系的数列（sequence），并设 A、B 如上由它的 u_0 和 u_1 构造而成。记 $w_n = A\alpha^n + B\beta^n$。我们对 n 用归纳法（induction）证明以下命题：

$$P(n): \quad u_n = w_n \text{ 及} u_{n+1} = w_{n+1}.$$

每个新的项都取决于它之前的两项，所以命题必须同时包含连续两项。

基础步骤（*base case*）。$P(0)$ 是说 $u_0 = w_0$ 及 $u_1 = w_1$，这正是我们在上面验证过的。

归纳步骤（*inductive step*）。假设 $P(n)$ 成立。(u_n) 和 (w_n) 都满足递归关系，而且 $a \neq 0$，所以

$$u_{n+2} = -\frac{bu_{n+1} + cu_n}{a} = -\frac{bw_{n+1} + cw_n}{a} = w_{n+2}.$$

连同 $u_{n+1} = w_{n+1}$，这就是 $P(n+1)$。

所以 $P(n)$ 对所有 $n \geq 0$ 成立，即对每个 n 都有 $u_n = A\alpha^n + B\beta^n$。递归关系的任何解都具有这个形式，其中 A 和 B 由 u_0 和 u_1 决定。这条公式给出的就是唯一的解。

数列 v_n

每个系数都是 $(n+1)$、$(n+2)$、$(n+3)$ 这三个因子中其中两个的乘积，而各自缺少的因子都不相同。除以 $(n+1)(n+2)(n+3)$（当 $n \geq 0$ 时它永不为零），得

$$8\,\frac{v_{n+2}}{n+3} - 2\,\frac{v_{n+1}}{n+2} - \frac{v_n}{n+1} = 0.$$

每个分数都具有 $v_k/(k+1)$ 的形式。因此设

$$w_n = \frac{v_n}{n+1},$$

递归关系便变成

$$8w_{n+2} - 2w_{n+1} - w_n = 0, \qquad w_0 = 0, \quad w_1 = \tfrac{1}{2}.$$

辅助方程是 $8x^2 - 2x - 1 = 0$，即 $(2x-1)(4x+1) = 0$。它的根 $\alpha = \frac{1}{2}$ 和 $\beta = -\frac{1}{4}$ 是相异实根，所以第一部分的结果适用，其中 $\alpha - \beta = \frac{3}{4}$：

$$A = \frac{w_1 - \beta w_0}{\alpha - \beta} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}, \qquad B = \frac{w_1 - \alpha w_0}{\beta - \alpha} = \frac{1/2}{-3/4} = -\frac{2}{3}.$$

因此 $w_n = \frac{2}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)$。第一部分亦告诉我们，这是 w_n 唯一的可能，因而也是 v_n 唯一的可能。乘回 $n+1$，得

$$\boxed{v_n = \frac{2(n+1)}{3}\left(\frac{1}{2^n} - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

验算

公式给出 $v_0 = \frac{2}{3}(1-1) = 0$ 和 $v_1 = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 1$，符合要求。以 $n = 0$ 和 $n = 1$ 用人手计算原来的递归关系，得 $16v_2 = 6v_1 + 6v_0$，所以 $v_2 = \frac{3}{8}$；然后 $48v_3 = 16v_2 + 12v_1$，所以 $v_3 = \frac{3}{8}$。公式的结果与此吻合：$v_2 = 2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right) = \frac{3}{8}$ 及 $v_3 = \frac{8}{3}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{64}\right) = \frac{3}{8}$。我们以有理数运算，对 n 直至 41 精确地核对过公式与递归关系相符，亦以数百组随机的二次方程和初始值核对过第一部分。

常见错误

- 每次只对一项作归纳。单凭 $u_n = w_n$，无法推出任何关于 u_{n+1} 的结论：归纳假设必须涵盖连续两项。
- 忘记说明为何可以除以 a（因为方程有两个根，所以它不为零）和除以 $\alpha - \beta$（两根相异）。
- 直接把第一部分应用于 v_n。它的系数取决于 n，所以第一部分适用的，是经重新缩放的数列 $w_n = v_n/(n+1)$。

STEP 之外

二阶线性递归关系的解构成一个二维向量空间（vector space），而 α^n、β^n 是它的一组基（basis）。这与微分方程（differential equation）$ay'' + by' + cy = 0$ 及其解 $e^{\alpha x}$ 和 $e^{\beta x}$ 的情况完全平行。把递归关系写成 $\mathbf{u}_{n+1} = M\mathbf{u}_n$，其中 M 是一个 2×2 矩阵，便可看出 α 和 β 是 M 的特征值（eigenvalue），而重根则对应于不能对角化（diagonalise）的矩阵。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）正是这样通过特征值来处理差分方程（difference equation），而 Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程）则为微分方程建立了平行的理论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。