详细解答

STEP III 1988，第 14 题

力学 · 光滑金属线上的运动

STEP III 1988，第 14 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

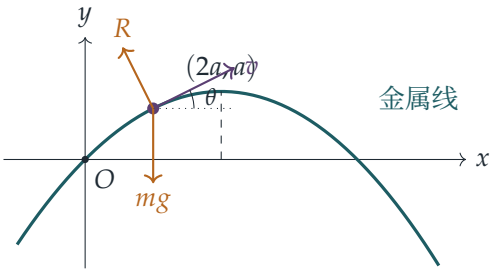
step.maths.org/questions/88-s3-q14

关键思路

如果金属线对小珠完全不施力，小珠就只是一个抛体（projectile），仅在重力作用下运动。所以第 (i) 部分问的是：一个沿金属线方向抛出的自由抛体，能否刚好沿着金属线的抛物线（parabola）运动？把两条抛物线对照起来即可。至于第 (ii) 部分，金属线是光滑的，所以能量守恒（conservation of energy）。真正要做的功夫，是利用 $\tan\theta = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$，把速率和高度用斜角 θ 表示出来。

解答

我们把小珠视为一个质量为 m 的质点（particle），套在一条固定的光滑金属线上。作用在它身上的力只有两个：垂直向下的重量 mg，以及金属线的法向反作用力（normal reaction）R，后者与金属线垂直。



以下会反复用到关于金属线的两个事实。在一般的点上，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 - \frac{x}{2a},$$

所以在原点处斜率为 1，小珠出发时的方向与 x-轴成 45° 仰角。由于金属线是一条开口向下的抛物线，它的最高点位于 $x = 2a, y = a$。

第 (i) 部分

假设在整个运动过程中 $R = 0$。那么重力就是唯一的力，小珠的运动便与一个以初速率 V、仰角 45° 抛出的抛体完全相同。它的水平速度保持不变，恒为 $V/\sqrt{2}$，所以 $x = Vt/\sqrt{2}$。同时

$$y = \frac{V}{\sqrt{2}}\,t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

以 $t = \sqrt{2}\,x/V$ 消去时间，得到轨迹（trajectory）

$$y = x - \frac{gx^2}{V^2}.$$

只有当这条曲线在小珠所到达的每一个 x 处都与金属线 $y = x - x^2/(4a)$ 重合，它才是小珠的路径。这就需要

$$\frac{g}{V^2} = \frac{1}{4a}, \qquad \text{即} \qquad V = 2\sqrt{ag}.$$

反过来，取 $V = 2\sqrt{ag}$。一个从 O 以这个速率、仰角 45° 抛出的自由质点，会沿着曲线 $y = x - x^2/(4a)$ 运动，而这正是金属线本身。因此它沿着金属线运动，每一刻都有 $R = 0$，而这个运动在反作用力为零的情况下满足小珠的运动方程（equation of motion）。由于 $x = Vt/\sqrt{2}$ 稳定地增加，小珠会越过位于 $(2a, a)$ 的顶点，并沿另一边一直向下运动，永不停止。在整个过程中，它对金属线不施加任何压力，符合题目要求，而所求的速率是 $V = 2\sqrt{ag}$。

> **想一想** 套在金属线上的小珠，怎可能在完全没有反作用力的情况下运动？金属线不是要把它留在线上吗？

只有当单靠重力会令小珠偏离曲线时，金属线才需要施力。换了任何其他速率，情况正是如此。V 较大时，抛体的抛物线较平坦，所以金属线必须把小珠向下拉。V 较小时，抛物线弯曲得较厉害，所以金属线必须把小珠托住。而刚好在 $V = 2\sqrt{ag}$ 时，重力已经提供了曲线所需的加速度，金属线便无事可做。

第 (ii) 部分

现在 V 是任意的。速度沿着金属线的切线（tangent）方向，所以

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 - \frac{x}{2a}, \qquad \text{所以} \qquad x = 2a(1 - \tan\theta).$$

（如果小珠向后滑回，它的速度便沿切线指向相反方向，角度改变 π。这时 $\tan\theta$ 和 $\cos^6\theta$ 都不变，所以下文不受任何影响。）

以 θ 表示速率。把 $x = 2a(1 - \tan\theta)$ 对 t 求导，得

$$\dot{x} = -2a\sec^2\theta\,\dot{\theta}.$$

由于 $\dot{y} = \tan\theta\,\dot{x}$，速率 v 满足

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}^2(1 + \tan^2\theta) = \dot{x}^2\sec^2\theta = \frac{4a^2\dot{\theta}^2}{\cos^6\theta}.$$

以 θ 表示高度。记 $T = \tan\theta$，于是 $x = 2a(1 - T)$，

$$\begin{aligned} y = x - \frac{x^2}{4a} &= 2a(1-T) - a(1-T)^2 \\ &= a(1-T)\big(2 - (1-T)\big) \\ &= a(1-T)(1+T) = a(1 - \tan^2\theta). \end{aligned}$$

能量。金属线是光滑的，而 R 与速度垂直，所以 R 不作功，机械能（mechanical energy）守恒。小珠从 O 以速率 V 出发，所以

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + mgy = \tfrac{1}{2}mV^2, \qquad \text{即} \qquad v^2 + 2gy = V^2.$$

代入 v^2 和 y 的表达式，得

$$\frac{4a^2\dot{\theta}^2}{\cos^6\theta} + 2ga(1 - \tan^2\theta) = V^2,$$

这就是所要证明的结果。

验算

- 在 $t = 0$ 时，我们有 $\theta = 45^\circ$，所以 $\tan^2\theta = 1$，第二项消失。这时第一项就是 $v^2 = V^2$，与预期相符。
- 取第 (i) 部分的 $V^2 = 4ag$，则 $\dot{x} = V/\sqrt{2}$ 为常数，所以 $\dot{\theta} = -\dot{x}\cos^2\theta/(2a)$。第一项变成 $2ag\sec^2\theta = 2ag(1 + \tan^2\theta)$。加上 $2ga(1 - \tan^2\theta)$ 便得 $4ag = V^2$。两部分的结果互相吻合。
- 数值方面，我们用龙格—库塔法（Runge–Kutta method）沿金属线逐步计算小珠的运动方程。取 $a = 1$、$g = 9.8$ 和 $V = 2\sqrt{9.8}$，算出的法向反作用力（以每单位质量计）一直到 $x \approx 13$ 都保持在 10^{-15} 以下。把 V 增加 30% 后，它在起点处约为 4.8。对于随机选取的 V 值，包括一些令小珠向后滑回的情况，第 (ii) 部分的恒等式都成立，相对误差约为 10^{-13}。

常见错误

- 只证明了在抛出的一刻 $R = 0$。题目要求的是一个*自始至终*都没有反作用力的运动，这正是我们要把整条轨迹与金属线对照的原因。
- 对 $\tan\theta$ 求导时，忘记了链式法则（chain rule）所带来的因子 $\sec^2\theta$。这样第一项中便会出现 $\cos^2\theta$，而不是 $\cos^6\theta$。

STEP 之外

第 (ii) 部分是这个运动的一个首次积分（first integral）：能量守恒把一条二阶方程化为只含单一坐标（这里是 θ）的一阶方程。在大学一年级的课程中，这会发展成处理约束运动（constrained motion）的拉格朗日（Lagrangian）方法：你只需选取一个能描述约束的坐标，完全不必计算反作用力。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对约束运动和能量方法有细致的处理，很值得一读。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。