详细解答

STEP III 1988，第 13 题

力学 · 有空气阻力的抛体

STEP III 1988，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/88-s3-q13

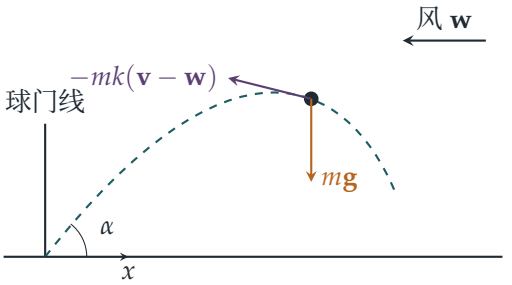
关键思路

空气阻力与速度成正比时，运动方程（equation of motion）是线性的，因此每个分量都可以用积分因子（integrating factor）求解。要看清最后一部分，最简洁的方法是问：终端速度（terminal velocity）是甚么？速度会由初始值按指数规律趋向终端速度，所以若这两个向量平行，速度便永远不会离开通过原点的同一条直线。于是皮球沿着同一条直线路径飞出去，再飞回来。

解答

运动方程

我们把皮球看成质量为 m 的质点（particle）。作用于它的力有两个：重量 $m\mathbf{g}$，以及空气阻力。皮球相对于空气的速度是 $\mathbf{v}-\mathbf{w}$，而阻力与这个相对速度方向相反，所以阻力是 $-mk(\mathbf{v}-\mathbf{w})$。



由牛顿第二定律（Newton's second law）得

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = m\mathbf{g} - mk(\mathbf{v} - \mathbf{w}).$$

两边除以 m 并移项，

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} + k\mathbf{v} = \mathbf{g} + k\mathbf{w},$$

这正是所要证明的结果。

时间 t 时的位置

取开球点为原点，x 轴为水平方向并指向开球的方向，y 轴垂直向上。记 $V = |\mathbf{v}_0|$、$W = |\mathbf{w}|$ 及 $g = |\mathbf{g}|$。皮球是迎着风踢出的，所以

$$\mathbf{w} = (-W, 0), \qquad \mathbf{g} = (0, -g), \qquad \mathbf{v}_0 = (V\cos\alpha, V\sin\alpha).$$

设 $\mathbf{v} = (u, v)$，运动方程的两个分量便是

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + ku = -kW, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kv = -g.$$

把第一式乘以积分因子 e^{kt}，得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u\,\mathrm{e}^{kt}) = -kW\mathrm{e}^{kt}$，所以 $u\,\mathrm{e}^{kt} = -W\mathrm{e}^{kt} + C$。由于 $t = 0$ 时 $u = V\cos\alpha$，故 $C = V\cos\alpha + W$，于是

$$u = -W + (V\cos\alpha + W)\,\mathrm{e}^{-kt}.$$

用完全相同的方法，

$$v = -\frac{g}{k} + \left(V\sin\alpha + \frac{g}{k}\right)\mathrm{e}^{-kt}.$$

再由 0 至 t 积分一次，并利用 $t = 0$ 时 $x = y = 0$ 以及 $\int_0^t \mathrm{e}^{-ks}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt})$，得

$$x = -Wt + \frac{V\cos\alpha + W}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt}),$$

$$y = -\frac{g}{k}t + \frac{1}{k}\left(V\sin\alpha + \frac{g}{k}\right)(1 - \mathrm{e}^{-kt}).$$

写成向量形式，设 $\mathbf{u}_\infty = \mathbf{w} + \mathbf{g}/k$（即终端速度，亦即运动方程的常数解），上式便是

$$\mathbf{r} = \mathbf{u}_\infty t + \frac{1}{k}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{u}_\infty)(1 - \mathrm{e}^{-kt}).$$

乌龙球

想一想 $\tan\alpha = g/(kW)$ 这个条件，说明了终端速度的甚么性质？

终端速度是 $\mathbf{u}_\infty = (-W, -g/k) = -W(1, g/(kW))$。条件给出 $g/(kW) = \tan\alpha$，所以 $\mathbf{u}_\infty = -W(1, \tan\alpha)$，它与 $\mathbf{v}_0$ 平行（方向相反）。由向量公式可见，$\mathbf{r}$ 此时始终是两个沿 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ 方向的向量的组合，所以皮球沿直线 $y = x\tan\alpha$ 运动。

若要直接从分量看出这一点，可利用 $g/k = W\tan\alpha$：

$$V\sin\alpha + \frac{g}{k} = V\sin\alpha + W\tan\alpha = \tan\alpha\,(V\cos\alpha + W),$$

所以

$$y = \tan\alpha\left[-Wt + \frac{V\cos\alpha + W}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt})\right] = x\tan\alpha \quad \text{对所有} t \geq 0.$$

因此，皮球位于地面（即 $y = 0$）当且仅当 $x = 0$（因为 $\tan\alpha \neq 0$）。余下要检查的，是这情况确实在某个 $t > 0$ 发生。设 $f(t) = x(t)$。则 $f(0) = 0$ 而 $f'(0) = V\cos\alpha > 0$，所以刚踢出之后 $x > 0$。此外

$$f''(t) = -k(V\cos\alpha + W)\,\mathrm{e}^{-kt} < 0,$$

所以 f 是严格凹函数（strictly concave），而且由于有 $-Wt$ 一项，当 $t \to \infty$ 时 $f(t) \to -\infty$。因此 f 恰好有一个正零点 T，并且在该处 $f'(T) < 0$（一个由 0 升起的凹函数，在跌回 0 时必定正在递减）。

在时间 T，皮球回到原点，即球门线上开球的那一点，而且水平速度为负，也就是说正朝着球门移动。它沿着飞出去时的那条直线飞回来，并在地面高度越过球门线，远低于横楣。既然守门员不在位，这便是一个乌龙球。

验算

- 当 $k \to 0$ 时，$\frac{1}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt}) \to t$ 而 $\frac{1}{k}\left(t - \frac{1}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt})\right) \to \frac{1}{2}t^2$，所以 $x \to Vt\cos\alpha$ 而 $y \to Vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$：这正是普通的抛体运动（projectile motion）。
- 当 $t \to \infty$ 时，速度趋向 $(-W, -g/k)$，即运动方程的常数解：皮球最终随风飘移，同时以终端速率下坠。
- 以龙格－库塔法（Runge–Kutta）对运动方程作数值积分，在随机选取多组 V, α, W, k 的情况下，结果与 x 和 y 的公式相符，误差约为 10^{-13}。当 $\tan\alpha = g/(kW)$ 时，计算所得的路径一直留在 $y = x\tan\alpha$ 上，并在 $x = 0$ 处着地，而且 $u < 0$；若取例如 $V = 20$、$\alpha = 0.6$、$W = 5$、$k = 0.5$，皮球则落在前场 17.1 m 处。

常见错误

- 把阻力取为 $-mk\mathbf{v}$（相对于地面），而不是 $-mk(\mathbf{v} - \mathbf{w})$。
- 弄错 $\mathbf{w}$ 的正负号：皮球是迎着风踢出的，所以 $\mathbf{w}$ 指向球门的方向。
- 得出 $y = x\tan\alpha$ 便停下来，没有检查皮球是否真的回到 $x = 0$，以及回到该处时是否正朝着球门移动。

STEP 之外

方程 $\dot{\mathbf{v}} + k\mathbf{v} = \mathbf{F}$（其中 $\mathbf{F}$ 为常数）是线性系统松弛至平衡状态（equilibrium）的最简单例子：偏差 $\mathbf{v} - \mathbf{F}/k$ 按 e^{-kt} 的方式衰减。线性阻力只对细小而缓慢的物体才符合实际；足球实际所受的阻力大致与其速率的平方成正比，这令方程变成非线性，并使水平与垂直方向的运动互相耦合。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对这两种阻力都有讨论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。