详细解答

STEP III 1988，第 12 题

力学 · 斜碰撞

> **STEP III 1988，第 12 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/88-s3-q12

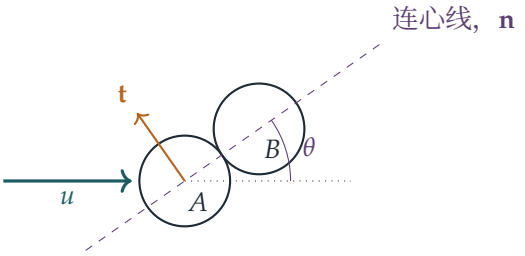
关键思路

对光滑球体而言，碰撞瞬间的冲量（impulse）只沿连心线（line of centres）作用。因此我们把每个速度分解为沿连心线的分量和垂直于连心线的分量：垂直分量完全不受影响，而沿连心线方向则是一个普通的一维碰撞。于是一切都取决于一个未知量，即连心线与第一个球原来速度之间的夹角。

解答

建立模型

把两球视为质量同为 m 的光滑球体，在光滑桌面上滑动，因此碰撞期间唯一的水平力就是沿连心线的接触冲量。设第一个球 A 以速率 u 运动，并设碰撞时连心线与 A 的速度成角 θ，其中 $0 \le \theta < \frac{1}{2}\pi$（若 $\theta = \frac{1}{2}\pi$，两球只是擦过，甚么也不会发生）。取单位向量（unit vector）$\mathbf{n}$ 沿连心线（由 A 指向 B），$\mathbf{t}$ 与之垂直。



碰撞前，A 沿 $\mathbf{n}$ 的分量为 $u\cos\theta$，沿 $\mathbf{t}$ 的分量为 $u\sin\theta$；B 静止。

沿 $\mathbf{t}$ 方向：两球在这个方向上都没有受到冲量，所以 A 保持 $u\sin\theta$，B 保持 0。

沿 $\mathbf{n}$ 方向：设碰撞后的分量为 v_A 和 v_B。由动量守恒（conservation of momentum）（质量互相约去）和牛顿恢复定律（Newton's law of restitution）得

$$v_A + v_B = u\cos\theta, \qquad v_B - v_A = e\,u\cos\theta,$$

所以

$$v_A = \tfrac{1}{2}(1-e)\,u\cos\theta, \qquad v_B = \tfrac{1}{2}(1+e)\,u\cos\theta.$$

因此碰撞后

$$\mathbf{v}_A = \tfrac{1}{2}(1-e)u\cos\theta\,\mathbf{n} + u\sin\theta\,\mathbf{t}, \qquad \mathbf{v}_B = \tfrac{1}{2}(1+e)u\cos\theta\,\mathbf{n}.$$

两个速度之间的夹角

B 沿连心线运动，而两个速度之间的夹角为锐角，当且仅当它们的纯量积（scalar product）为正。这里

$$\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B = \tfrac{1}{4}(1-e)(1+e)\,u^2\cos^2\theta > 0,$$

因为 $e < 1$、$u \neq 0$，而且当 $0 \le \theta < \frac{1}{2}\pi$ 时 $\cos\theta > 0$。故此两个速度之间的夹角小于 $\frac{1}{2}\pi$，这正是所要证明的。（对于正面碰撞，即 $\theta = 0$，两球沿同一直线运动，夹角为 0。）

留意 $e < 1$ 在哪里用到：若 $e = 1$，则 $v_A = 0$，两球恰好成直角分开，这就是大家熟悉的桌球结果。

最大偏转角

设 ϕ 为 A 的偏转角（angle of deflection），即 $\mathbf{v}_A$ 与原来方向 $\cos\theta\,\mathbf{n} + \sin\theta\,\mathbf{t}$ 之间的夹角。记 $k = \frac{1}{2}(1-e)$，则 $0 < k \le \frac{1}{2}$，且 $\mathbf{v}_A = u(k\cos\theta\,\mathbf{n} + \sin\theta\,\mathbf{t})$。对方向向量 $(\cos\theta, \sin\theta)$ 和 $(k\cos\theta, \sin\theta)$ 使用纯量积和二维叉积（cross product），得

$$|\mathbf{v}_A|\cos\phi = u\,(k\cos^2\theta + \sin^2\theta),$$
$$|\mathbf{v}_A|\sin\phi = u\,(\cos\theta\sin\theta - k\cos\theta\sin\theta) = u\,(1-k)\sin\theta\cos\theta.$$

第一式为正，所以 ϕ 是锐角；两式相除（再把分子和分母同除以 $\cos^2\theta$），并记 $t = \tan\theta \ge 0$，得

$$\tan\phi = \frac{(1-k)t}{k+t^2}.$$

想一想 怎样才能不经繁琐的求导而求出这个式子的最大值?

由于 ϕ 是锐角，求 ϕ 的最大值等同于求 $\tan\phi$ 的最大值。当 $t > 0$ 时，

$$\tan\phi = \frac{1-k}{k/t+t} \quad \text{而} \quad \frac{k}{t} + t \ge 2\sqrt{k}$$

这是由算术平均—几何平均不等式（AM–GM inequality）得出的，等号成立当且仅当 $t = \sqrt{k}$。（当 $t = 0$ 时，$\phi = 0$。）所以最大值在 $\tan\theta = \sqrt{k}$ 时取得，且

$$\tan\phi_{\max} = \frac{1-k}{2\sqrt{k}}.$$

要转换成正弦，留意 $(1-k)^2 + (2\sqrt{k})^2 = 1 - 2k + k^2 + 4k = (1+k)^2$，所以在两条直角边为 $1-k$ 和 $2\sqrt{k}$ 的直角三角形中，斜边为 $1+k$，于是

$$\sin\phi_{\max} = \frac{1-k}{1+k} = \frac{\frac{1}{2}(1+e)}{\frac{1}{2}(3-e)} = \frac{1+e}{3-e},$$

当中用到 $1-k = \frac{1}{2}(1+e)$ 和 $1+k = \frac{1}{2}(3-e)$。由于 $\phi_{\max}$ 是锐角，

$$\phi_{\max} = \sin^{-1}\left(\frac{1+e}{3-e}\right),$$

这就是所求的结果。它出现于连心线与原来运动方向成角 $\tan^{-1}\sqrt{\frac{1}{2}(1-e)}$ 之时。

验算

- $e \to 1$：公式给出 $\sin^{-1}1 = \frac{1}{2}\pi$，与完全弹性（perfectly elastic）的情况一致：此时 A 失去沿连心线的全部速度，所以它总是沿垂直于连心线的方向运动，而一次接近正面的撞击会使它以接近直角的方向偏离原来的路径。
- $e = 0$：$\sin\phi_{\max} = \frac{1}{3}$，所以 $\phi_{\max} \approx 0.3398$ rad（19.5°）。
- $e = \frac{1}{2}$：$\sin\phi_{\max} = \frac{3}{5}$，$\phi_{\max} \approx 0.6435$ rad，出现于 $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{2} \approx 0.4636$。以数值方法对 200 000 个 θ 值逐一计算偏转角，结果与这两个数字吻合；而 200 000 次随机碰撞中，两个速度之间的夹角从未达到或超过 $\frac{1}{2}\pi$。

常见错误

- 把恢复定律套用于整个速率，而不是沿连心线的分量。
- 忘记 A 的速度的垂直分量保持不变；正是这一点才令 A 发生偏转。
- 对反正切函数求导来直接求 ϕ 的最大值；改用 $\tan\phi$（因为 ϕ 是锐角，这样做是合理的）会简洁得多。

STEP 之外

这里的分解方法，其实就是牛顿第二定律（Newton's second law）的冲量形式：冲量只会在其作用的方向上改变动量。在弹性碰撞的情况下，直角这个结果是一个巧妙的参考

系（frame of reference）论证的特例：在质心参考系（centre-of-mass frame）中，弹性碰撞保持每个球的速率不变，只改变其方向，而变换回实验室参考系（lab frame）后，便一次过得出所有可能的结果。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学导论）正是这样在质心参考系中处理碰撞的。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。